TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUI NHƠN
KHOA VẬT LÝ
VIỆN KHOA HỌC VÀ GIÁO DỤC LIÊN NGÀNH
NHÓM VẬT LÝ LÝ THUYẾT

***

TÁN XẠ COMPTON TRONG LÝ THUYẾT ĐIỆN ĐỘNG LỰC HỌC LƯỢNG TỬ

Khoá luận tốt nghiệp đại học K. 37

Giáo viên hướng dẫn: TS. Đào Thị Nhung
Sinh viên thực hiện: Lê Trương Mỹ Hậu

Qui Nhơn - 2018

Lời cảm ơn

Trong suốt thời gian vừa qua, ngoài sự cố gắng của bản thân tôi, để hoàn thành được khóa luận tôi xin được cảm ơn các thầy cô khoa Vật lý trường đại học Quy Nhơn đã giảng dạy tôi trong suốt bốn năm học, giúp tôi có được kiến thức nền tảng để làm khóa luận. Tôi xin được cảm ơn Ban lãnh đạo khoa Vật lý và trường Đại học Quy Nhơn đã tạo điều kiện cho tôi được làm khóa luận tại Viện nghiên cứu Khoa học và giáo dục liên ngành. Và trên hết, tôi phải dành sự cảm ơn chân thành đến TS. Đào Thị Nhung và TS. Lê Đức Ninh làm việc tại Viện nghiên cứu Khoa học và giáo dục liên ngành, người đã trực tiếp hướng dẫn, nhiệt tình giúp đỡ giảng dạy tôi về lý thuyết mới, hỗ trợ tôi trong việc học tập và sửa chữa những sai sót của khóa luận.

Trong quá trình làm khóa luận, do thời gian hạn hẹp và trình độ bản thân chưa cao nên khó tránh khỏi sai sót, rất mong quý thầy cô thông cảm và bỏ qua. Hy vọng sẽ nhận được sự đóng góp của các thầy cô để tôi có thể nhận ra sai sót và sửa chữa.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Danh sách hình vẽ

Mục lục

Chương 1

Giới thiệu

1.1 Mở đầu

1.1.1 Lý do chọn đề tài

Từ thời cổ đại, con người sống và nhận biết thời gian dựa vào ánh sáng mặt trời. Nhờ ánh sáng con người sinh sống, trồng trọt mùa màng và nhận thức thế giới qua cặp mắt của mình. Đối với một số nền văn minh còn coi ánh sáng là thần thánh, linh thiêng, là sự dẫn dắt từ cõi sống đến thế giới khác,...Ánh sáng gắn bó với họ một cách tự nhiên và hết sức quan trọng. Tuy nhiên không vì vậy mà con người chấp nhận sự xuất hiện của ánh sáng như là hiển nhiên. Đã có rất nhiều nhà bác học, khoa học cổ đại và trung đại nghiên cứu về ánh sáng. Tuy nhiên trong giai đoạn đó các nghiên cứu chỉ là các thuyết sơ khai và ngô nghê đưa ra để giải thích các hiện tượng liên quan đến việc nhìn thấy của con người, giải thích về màu sắc ánh sáng mà không đi vào tìm hiểu bản chất của ánh sáng. Ánh sáng lúc bấy giờ là thứ phi vật chất.

Đến thế kỉ XVII Descartes dựa trên các hiện tượng khúc xạ và phản xạ ánh sáng đã đưa ra thuyết ánh sáng là chùm hạt ánh sáng chuyển động với vận tốc xấp xỉ ánh sáng. Ý tưởng này được Newton một lần nữa đưa ra, ông đã bác bỏ thuyết của Huygens cho rằng ánh sáng là sóng truyền đi trong môi trường ete và môi trường này chiếm đầy trong vũ trụ vì trong chân không ánh sáng vẫn được truyền đi và nếu có môi trường ete thì ete sẽ cản trở sự chuyển động của các hành tinh [1]. Dưới sự nổi tiếng của Newton và cộng thêm thuyết sóng lúc đó chỉ vận dụng để giải thích hiện tượng phản xạ, khúc xạ điều mà thuyết hạt vẫn giải thích được thì thuyết sóng bị dập tắt.

Mãi đến thế kỉ XVIII, khi Young phát hiện ra hiện tượng giao thoa lúc này thuyết hạt không thể giải thích được và trở nên yếu dần, người ta bắt đầu khơi lại thuyết sóng và nhận ra rằng có thể giải thích hiện tượng trên, tuy nhiên vẫn còn một số hạn chế trong thuyết sóng vì chưa thể giải thích được hiện tượng phân cực. Fresnel đã dùng thuyết sóng tiếp tục giải thích thành công hiện tượng nhiễu xạ. Và để giải quyết vấn đề về phân cực ông đã so sánh ánh sáng với âm thanh, từ đó đưa ra kết luận táo bạo ánh sáng là sóng ngang [1]. Đến thế kỉ XIX Foucault đã đo và so sánh vận tốc ánh sáng trong nước nhỏ hơn trong không khí đưa ra kết quả trái ngược với kết quả của thuyết hạt tiên đoán. Lúc này thuyết hạt hoàn toàn bị lụi tàn nhường chỗ cho thuyết sóng lên ngôi.

Năm 1864 nhà vật lý James Clerk Maxwell đã dựa trên thuyết sóng với môi trường ete xây dựng nên bốn phương trình mà bây giờ ta thường gọi là hệ phương trình Maxwell. Các phương trình này mô tả sóng điện từ lan truyền trong không gian và biến đổi theo thời gian. Khi có sự biến thiên điện trường sẽ sinh ra từ trường xoáy và ngược lại. Hai trường tạo thành thể thống nhất không tách rời, trong khi trước đó người ta xem đó là hai hiện tượng riêng biệt. Chúng là hai thành phần của sóng điện từ lan truyền trong không gian dưới dạng sóng ngang. Dựa vào hệ phương trình Maxwell ông đã tính ra vận tốc sóng điện từ bằng vận tốc ánh sáng, từ đó ông kết luận ánh sáng là sóng điện từ. Ông sử dụng thuật ngữ bức xạ điện từ thay cho sóng điện từ và ánh sáng nhìn thấy chỉ là phần nhỏ của phổ bức xạ điện từ.

Sau đó năm 1887 [1] nhà vật lý Albert Michelson đã dùng giao thoa kế làm thí nghiệm với mục đích "tìm kiếm" ete, và nhận thấy rằng vận tốc ánh sáng không đổi dù có truyền theo các phương khác nhau. Điều này gây nên tranh cãi và nhiều sự hoài nghi với giả thuyết ete trong giới khoa học bấy giờ. Sau đó Einstein đã mạnh dạn bác bỏ môi trường ete và khẳng định bằng thuyết tương đối hẹp, ông đưa ra thêm rằng sóng ánh sáng hay sóng điện từ khác với các sóng khác có thể truyền được trong chân không mà không cần môi trường trung gian nào.

Năm 1899 [1] người ta biết đến hiện tượng quang điện: khi chiếu một bức xạ điện từ vào tấm kim loại sẽ làm bật ra chùm electron. Sự xuất hiện các quang electron này không phụ thuộc vào cường độ bức xạ tới mà chỉ phụ thuộc vào tần số của bức xạ. Quang học cổ điển không thể giải thích được hiện tượng đó, vì năng lượng của chùm sáng phụ thuộc vào cường độ của nó. Để giải thích điều này Einstein đã mở rộng thuyết lượng tử của Planck ánh sáng được cấu tạo từ chùm các hạt năng lượng hay lượng tử ánh sáng gọi là photon. Mỗi photon luôn giữ nguyên một năng lượng xác định $\varepsilon = h\nu$ và chuyển động bằng vận tốc ánh sáng, không có photon ở trạng thái nghỉ. Các tia bức xạ điện từ luôn phóng ra các lượng tử năng lượng một cách gián đoạn, chúng giữ nguyên tính cá thể truyền đi và bị electron hấp thụ một cách gián đoạn. Nghĩa là mỗi electron sẽ nhận năng lượng của một photon truyền cho và bức ra cho nên sẽ phụ thuộc vào tần số bức xạ.

Năm 1922 [1] Compton đưa ra một hiện tượng mang tên hiệu ứng Compton: khi các tia bức xạ năng lượng rất lớn va chạm với vật chất sẽ làm xuất hiện các tia có bước sóng dài hơn tia tới. Nếu sử dụng quang học cổ điển sẽ không thể nào giải thích được, tuy nhiên nếu vận dụng giả thuyết lượng tử ánh sáng của Einstein thì mọi việc trở nên dễ dàng: bức xạ điện từ là một chùm photon, mỗi photon va chạm với một electron của nguyên tử. Trong va chạm này, photon sẽ truyền một phần năng lượng của nó cho electron, làm cho electron thay đổi vận tốc và năng lượng của photon giảm từ $h\nu$ xuống $h\nu'$, vì $\nu > \nu'$ nên $\lambda < \lambda'$.

Như vậy photon mang lưỡng tính sóng - hạt, vừa mang năng lượng vừa tồn tại xung lượng như bất kì hạt nào. Và năng lượng của photon có thể thay đổi trong khoảng thời gian sống của nó. Louis de Broglie đã mở rộng ý tưởng tính lưỡng sóng hạt cho mọi đối tượng vật chất, làm tiên đề cho cơ học lượng tử. Cơ học lượng tử là cơ học áp dụng cho vật ở trạng thái vi mô, nơi vật thể hiện lưỡng tính sóng - hạt rõ rệt. Cơ học lượng tử mang tính thống kê xác suất, ta không thể biết được vị trí và quỹ đạo của vi hạt mà chỉ biết được xác suất tìm thấy hạt tại một điểm. Đối với quá trình tán xạ cũng vậy cơ học lượng tử cho phép ta xác định được số biến cố tán xạ.

Khi hạt chuyển động với tốc độ lớn, ta phải dùng cơ học lượng tử tương đối tính, phương trình Schördinger phải được thay bằng phương trình Klein Gordon và phương trình Dirac. Trong cơ học lượng tử trạng thái của các hạt được mô tả bởi các hàm sóng và không thể phản ánh được các quá trình sinh và hủy hạt, các hạt mới sinh ra có bản chất hoàn toàn khác với hạt tham gia tương tác ban đầu. Cơ học lượng tử phải được thay thế bằng lý thuyết trường lượng tử. Lý thuyết trường lượng tử mô tả các hạt và phản ánh quá trình tương tác giữa các hạt. Mỗi hạt sẽ tương ứng với hàm trường, hàm trường mang thông tin về tính chất sóng thể hiện qua hàm e^{ikx} với năng lượng k và tọa độ x, mang thông tin về tính chất hạt thể hiện qua các toán tử sinh và hủy hạt. Trên tinh thần đó, tôi quyết định chọn đề tài: **" Tán xạ Compton trong lý thuyết điện động lực học lượng tử "** với mong muốn nghiên cứu quá trình này trên khía cạnh khác đó là xác suất xảy ra quá trình tán xạ trong thực tế, và cũng với mong muốn học về lý thuyết trường lượng tử, lý thuyết tán xạ và các công cụ tính toán cần thiết.

Trong vật lý hạt, điện động lực học lượng tử (QED) là lý thuyết trường lượng tử tương đối tính của điện động lực học. QED dùng toán học để miêu tả tính chất các hạt và các quá trình tương tác của các hạt trong đó có sự tham gia của trường photon và trường các hạt mang điện. Các tương tác này gồm có tương tác giữa ánh sáng và vật chất thông qua trao đổi các hạt ảo, tương tác giữa các hạt mang điện thông qua trao đổi photon ảo.

Lý thuyết QED đã được kiểm chứng trong rất nhiều các so sánh với kết quả thực nghiệm. Tất cả các lý thuyết trường mở rộng đều phải coi QED là một phần không thể thiếu của nó.

1.1.2 Mục tiêu của đề tài

Xây dựng được lý thuyết về trường điện từ tự do, trường Dirac, lý thuyết tương tác.

Áp dụng được định lý Wick và quy tắc Feynman để tính biên độ tán xạ, tiết diện tán xạ vi phân.

1.1.3 Khách thể và phạm vi nghiên cứu

Trong khóa luận này sẽ nghiên cứu về lý thuyết điện động lực lượng tử và quá trình tán xạ Compton. Vì thời gian có hạn nên khóa luận chỉ dừng lại ở nghiên cứu về quá trình tán xạ của các hạt tự do và đi tính tiết diện tán xạ của quá trình $2 \to 2$.

1.1.4 Phương pháp nghiên cứu

Phương pháp nghiên cứu tài liệu và nghiên cứu lịch sử. Thực hiện các tính toán cụ thể và chi tiết.

Tôi xin cam đoan các tính toán chi tiết trong luận văn này đã được thực hiện bởi cá nhân tôi, các kết quả cuối cùng được so sánh với các tài liệu tham khảo.

1.2 Các quy ước

1.2.1 Hệ đơn vị

Trước khi đi vào nội dung chính, ta cần phải nhắc đến hệ đơn vị trước tiên vì bất cứ phép đo nào chỉ có ý nghĩa khi có đơn vị. Phép đo thực chất chính là đi so sánh các thông số giữa mẫu cần đo và mẫu chuẩn, và trên cơ sở đó người ta đặt ra các đơn vị khác nhau ứng với các đại lượng khác nhau, có đơn vị ta mới đánh giá chính xác được số liệu của phép đo. Vì là quy ước nên tùy theo từng quốc gia, từng lĩnh vực mà có rất nhiều hệ đơn vị. Phổ biến nhất trong số đó là hệ đơn vị quốc tế SI với bảy đơn vị cơ bản: m (chiều dài), s (thời gian), kg (khối lượng), A (cường độ dòng điện), T (nhiệt độ), mol (lượng vật chất), Cd (cường độ sáng) cùng với các đơn vị dẫn xuất.

Trong vật lý hạt cơ bản thường sử dụng rất nhiều hằng số vật lý như tốc độ ánh sáng c, điện tích e, hằng số Plank $\hbar$, hằng số Boltzmann k_B,...Nhằm đơn giản các phương trình và việc tính toán người ta đưa ra hệ đơn vị tự nhiên (NU), trong hệ NU người ta đặt các hằng số

$$c = \hbar = k_B = 1, \tag{1.2.1.1}$$

lúc đó các hằng số này sẽ biến mất trong các phương trình. Sau khi hoàn thành các quá trình tính toán và thu được kết quả, ta có thể chuyển về hệ đơn vị SI bằng cách so thứ nguyên và thêm vào các hằng số cần thiết. Hệ đơn vị này được xây dựng dựa trên duy nhất một đơn vị là electronvolt (eV), 1eV chính là năng lượng thu được của một điện tích eletron khi chuyển động băng qua hiệu điện thế 1 Vôn. Trong hệ đơn vị SI

$$E = 1\text{eV} = 1,6.10^{-19} J, \tag{1.2.1.2}$$

ta có thể dựa vào biểu thức trên để xác định đơn vị và cách chuyển đổi hệ đơn vị của các đại lượng khác như sau:

- Khối lượng: Khối lượng và năng lượng liên quan nhau qua hệ thức nổi tiếng của Einstein $E = mc^2$, vì trong hệ đơn vị tự nhiên $c = 1$ nên $m = E$. Nghĩa là khối lượng có đơn vị của electronvolt

$$m = 1\text{eV} = \frac{1,6.10^{-19}}{(3.10^8)^2} = 1,78.10^{-36}\text{kg}. \tag{1.2.1.3}$$

  Mối quan hệ giữa khối lượng trong hệ SI và trong hệ NU được viết

$$m_{SI} = \frac{m_{NU}}{c^2}. \tag{1.2.1.4}$$

- Xung lượng: Từ biểu thức tính năng lượng của photon $E = pc$ suy ra xung lượng có đơn vị của electronvolt. Ta có

$$p = 1\text{eV} = \frac{1,6.10^{-19}}{3.10^8} = 5,34.10^{-28}\text{kg.m/s}. \tag{1.2.1.5}$$

  Mối quan hệ giữa khối lượng trong hệ SI và trong hệ NU được viết

$$p_{SI} = \frac{p_{NU}}{c}. \tag{1.2.1.6}$$

- Chiều dài: Xuất phát từ biểu thức liên hệ giữa bước sóng rút gọn và năng lượng của photon

$$\lambda = \frac{\hbar c}{E}, \tag{1.2.1.7}$$

  suy ra $\frac{1}{\text{eV}}$ là đơn vị của chiều dài.

$$\lambda = \frac{1}{1\text{eV}} = \frac{6,626.10^{-34}(J.s)3.10^8(m/s)}{2\pi 1,6.10^{-19}(J)} = 1.97.10^{-7}\text{m}. \tag{1.2.1.8}$$

  Mối quan hệ giữa chiều dài trong hệ SI và trong hệ NU được viết

$$L_{SI} = L_{NU}.\hbar c. \tag{1.2.1.9}$$

- Thời gian: Xuất phát từ

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = \frac{hE}{2\pi E} = \frac{6,626.10^{-34}(J.s)}{2\pi.1.6.10^{-19}(J)}\text{eV} = 6.58.10^{-16}\text{eV}.s, \tag{1.2.1.10}$$

khi đó

$$t = \frac{1}{\text{eV}} = 6.58.10^{-16}\text{s}. \tag{1.2.1.11}$$

Mối quan hệ giữa thời gian trong hệ SI và trong hệ NU được viết

$$t_{SI} = \hbar.t_{NU}. \tag{1.2.1.12}$$

Trên đây là đơn vị và cách chuyển của một số đại lượng cơ bản, hay dùng trong vật lý hạt. Ta có thể thực hiện tương tự như trên để tìm đơn vị và cách chuyển từ hệ NU sang hệ SI của các đại lượng khác. Trong luận văn này tôi sẽ sử dụng hệ đơn vị tự nhiên trong các tính toán.

1.2.2 Không thời gian Minkowski

Trong cơ học cổ điển, không gian và thời gian là hai khái niệm hoàn toàn riêng biệt. Thời gian được xem là đại lượng bất biến, cùng một sự việc sẽ xảy ra trong một khoảng thời gian như nhau khi quan sát trong các hệ quy chiếu khác nhau, tức là thời gian và không gian không phụ thuộc vào nhau.

Trong mô hình thuyết tương đối hẹp của Albert Einstein, thời gian diễn ra của cùng một sự việc là dài hay ngắn phụ thuộc vào lựa chọn hệ quy chiếu, nghĩa là thời gian và không gian gắn liền với nhau. Từ đó nhà toán học Minkowski đã đưa ra không thời gian bốn chiều, trong đó không gian và thời gian có vai trò tương đương nhau. Tọa độ của một hạt được xác định bởi biến

$$x^\mu = (t, x, y, z) \tag{1.2.2.1}$$

với μ là chỉ số Lorentz hay chỉ số lấy tổng, $\mu = \overline{0,3}$.
Hàm $f(\overrightarrow{r}, t) \to f(x)$ với $x = x^\mu$. Tương tự như trong cơ học cổ điển, chiều dài của một vật là đại lượng không đổi, trong cơ học tương đối đại lượng khoảng cách

$$dS^2 = -(dx^2 + dy^2 + dz^2) + dt^2 \tag{1.2.2.2}$$

là bất biến Lorentz có hạng 0. Đại lượng nào bất biến Lorentz tức là đại lượng đó sẽ không đổi trong các hệ quy chiếu khác nhau, hay không đổi dưới phép biến đổi Lorentz. Từ đó đặt

$$x_\mu = (t, -x, -y, -z) \tag{1.2.2.3}$$

sao cho

$$dx^\mu dx_\mu = dx^0 dx_0 + dx^1 dx_1 + dx^2 dx_2 + dx^3 dx_3$$

$$
\begin{aligned}
&= -(dx^2 + dy^2 + dz^2) + dt^2 \\
&= dS^2
\end{aligned} \tag{1.2.2.4}
$$

là đại lượng không đổi. x^μ, x_μ được gọi là các Lorentz véc tơ hạng 1. Ta đặt ma trận

$$
g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.2.2.5}
$$

và $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}$. Xét

$$
g^{\mu\nu} x_\nu = g^{\mu 0} x_0 + \sum_{i=1}^{3} g^{\mu i} x_i \tag{1.2.2.6}
$$

mà

$$
\mu = 0 \Rightarrow g^{0\nu} x_\nu = x_0 = x^0, \tag{1.2.2.7}
$$

$$
\mu = i \Rightarrow g^{i\nu} x_\nu = -x_i = x^i, \tag{1.2.2.8}
$$

suy ra

$$
x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu. \tag{1.2.2.9}
$$

Chứng minh tương tự ta cũng có

$$
x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu, \tag{1.2.2.10}
$$

từ đó cho thấy $g^{\mu\nu}$ là ma trận có tác dụng nâng hạ chỉ số và được gọi là Lorentz tensor hạng 2.
Ta cũng cần nhắc đến xung lượng của hạt

$$
p = m \left(\frac{dt}{d\tau}; \frac{dx}{d\tau}; \frac{dy}{d\tau}; \frac{dz}{d\tau} \right) \tag{1.2.2.11}
$$

với τ là thời gian riêng xét trong hệ quy chiếu hạt đứng yên. Mà

$$
dt = d\tau.\gamma \tag{1.2.2.12}
$$

nên suy ra

$$
p^\mu = m\gamma(1, \overrightarrow{v}) = (E, \overrightarrow{p}) \tag{1.2.2.13}
$$

với $\overrightarrow{v} = \dfrac{d\overrightarrow{r}}{dt}$.
Định nghĩa phép biến đổi Lorentz trong không gian bốn chiều chuyển từ hệ tọa độ x^μ sang hệ tọa độ x'^μ

$$
x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \tag{1.2.2.14}
$$

bảo toàn khoảng cách được định nghĩa trong không gian bốn chiều

$$\begin{aligned} x'^{\mu}x'_{\mu} &= x'^{\mu}g_{\mu\nu}x'^{\nu} \\ &= \Lambda^{\mu}_{\rho}x^{\rho}g_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}_{\sigma}x^{\sigma} \\ &= x^{\rho}\Lambda^{\mu}_{\rho}g_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}_{\sigma}x^{\sigma} \\ &= x^{\sigma}x_{\sigma}. \end{aligned} \tag{1.2.2.15}$$

Suy ra

$$g_{\rho\sigma} = \Lambda^{\mu}_{\rho}g_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}_{\sigma}, \tag{1.2.2.16}$$

đây là định nghĩa phép biến đổi Lorentz tổng quát bao gồm phép quay của không gian ba chiều và phép biến đổi Lorentz boots.

Ví dụ nếu xét hệ tọa độ Oxyz có mặt phẳng Oxy quay quanh trục z tạo thành hệ tọa độ Ox'y'z, gọi φ là góc hợp bởi trục Ox và Ox' lúc đó phép biến đổi Lorentz là

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\varphi & sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.2.2.17}$$

Xét trường hợp hệ tọa độ Ox'y'z' chuyển động song song theo trục x của hệ tọa độ Oxyz với vận tốc không đổi v_o lúc đó phép biến đổi Lorentz boots là

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.2.2.18}$$

trong đó $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v_o^2}{c^2}}}$, $\beta = \dfrac{v_o}{c}$.

Vì xung lượng là một véc tơ bốn chiều nên biến đổi dưới nhóm Lorentz như sau:

$$p'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}p^{\nu}. \tag{1.2.2.19}$$

Trong giới hạn phi tương đối tính các phép biến đổi Lorentz được quy về các phép biến đổi Galileo.

Chương 2

Điện động lực học lượng tử

2.1 Hình thức luận Lagrangian

Trong cơ học cổ điển, người ta thường dùng ba định luật Newton để xác định quỹ đạo chuyển động của vật. Các định luật này trở thành nền móng quan trọng cho cơ học và ta thường gọi là cơ học Newton. Cách làm này tỏ ra rất hữu ích khi bài toán ta xét chỉ gồm một hay hai vật, nhưng khi mở rộng bài toán trên cho trường hợp N vật, cách làm này trở nên khó khăn, ví dụ khi xét hệ N vật ta cần phải viết 3N phương trình cho hệ ứng với 3 trục tự do của N vật và thêm C phương trình ràng buộc của hệ. Mặc khác, các định luật Newton dễ dàng miêu tả trong hệ tọa độ Descartes, nhưng trong một số hệ tọa độ khác phương trình chuyển động trở nên phức tạp mà khi giải các bài toán ta phải thường sử dụng nhiều hệ tọa độ. Các phương trình của 3 định luật Newton đều được viết dưới dạng véc tơ, việc giải các phương trình này không phải lúc nào cũng dễ dàng.

Để khắc phục những khó khăn trên, nhà toán học và thiên văn học người Pháp - Ý Joseph - Louis Lagrange đã đưa ra một phương pháp mới mang tính tổng quát và dễ dàng hơn để tìm quỹ đạo của các vật, đó là sử dụng Lagrangian. Cơ học trong trường hợp này đã được miêu tả bằng một hình thức mới, tổng quát hơn và được gọi là cơ học Lagrangian. Cơ học Lagrangian hướng tới những đại lượng vô hướng như năng lượng để mô tả chuyển động, ta có thể mô tả dễ dàng trong các hệ tọa độ khác nhau và số lượng phương trình trở nên ít hơn do khi xây dựng Lagrangian cho hệ ta phải sử dụng tính đối xứng của hệ. Trong cơ học cổ điển Lagrangian của hệ được tính bằng hiệu động năng và thế năng:

$$L = T - U. \tag{2.1.0.1}$$

Để xác định được quỹ đạo chuyển động của hệ, trước tiên ta cần xác định bậc tự do của hệ. Bậc tự do của hệ là số lượng biến độc lập mà hệ có thể được định nghĩa. Ví dụ một vật trượt dọc theo trục x có số bậc tự do là 1, con lắc quay trong mặt phẳng Oxy có một đầu dịch chuyển dọc theo trục Ox có số bậc

tự do là 2.
Quay trở lại bài toán N vật và C phương trình ràng buộc có số bậc tự do là 3N – C, ứng với mỗi bậc tự do bất kì biến x ta xác định được một phương trình Euler - Lagrange tương ứng:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0. \tag{2.1.0.2}$$

Nếu hệ đang xét có n bậc tự do, ta chỉ cần viết n hệ phương trình cho n biến tự do, tính Lagrangian của hệ rồi thay vào các phương trình trên và giải, từ đó thu được phương trình chuyển động của hệ.

Phương trình và cách tính Lagrangian trên thuộc trường hợp cơ học cổ điển, xét vật chuyển động trong không gian ba chiều. Ở đây bài toán tán xạ ta xét là sự tương tác giữa trường của các hạt. Các trường này gọi là trường tương đối được đặc trưng bởi hàm của không gian tọa độ $\varphi(x^\mu)$, trong đó $x^\mu = (t, x, y, z)$ có 4 thành phần không thời gian. Dựa vào phương trình Euler - Lagrange cho cổ điển, một cách tương tự ta viết lại phương trình cho trường tương đối

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi(x)} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \varphi(x))}\right) = 0, \tag{2.1.0.3}$$

trong đó ta đã định nghĩa

$$\partial_\mu \varphi(x) \equiv \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^\mu}, \tag{2.1.0.4}$$

ở đây $\varphi(x) = \varphi(x^\mu)$ tương ứng với đại lượng x và $\partial_\mu \varphi(x)$ tương ứng với $\dot{x}$ trong công thức (2.1.0.2). Chú ý rằng thay vì đạo hàm toàn phần theo biến t trong công thức cổ điển, ta mở rộng cho trường hợp 4 chiều đạo hàm riêng theo biến x vì trong không gian 4 chiều không thời gian được xem là như nhau. Để hiểu rõ hơn ta xét ví dụ sau.
Ví dụ. Trường của hạt có spin bằng 0 được gọi là trường vô hướng. Trường vô hướng của hạt không mang điện là trường thực có hàm mật độ Lagrangian

$$L = \frac{1}{2}\partial^\nu \varphi(x)\partial_\nu \varphi(x) - \frac{1}{2}m^2 \varphi(x)^2,$$

trong đó m là khối lượng của hạt vô hướng. Tìm phương trình chuyển động của trường.

Từ phương trình (2.1.0.3) ta có

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi(x)} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \varphi(x))}\right) = 0, \tag{2.1.0.5}$$

thay $L = \frac{1}{2}\partial^\nu \varphi(x)\partial_\nu \varphi(x) - \frac{1}{2}m^2 \varphi(x)^2$ vào ta được

$$-m^2 \varphi(x) - \partial_\mu \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \varphi(x))}\left[\frac{1}{2}(\partial^\nu \varphi(x))(\partial_\nu \varphi(x))\right] = 0$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow -m^2\varphi(x) - \frac{1}{2}\partial_\mu\left[\left(\partial^\nu\varphi(x)\frac{\partial(\partial_\nu\varphi(x))}{\partial(\partial_\mu\varphi(x))}\right) + \left(\partial_\nu\varphi(x)\frac{\partial(\partial^\nu\varphi(x))}{\partial(\partial_\mu\varphi(x))}\right)\right] = 0\\
&\Leftrightarrow -m^2\varphi(x) - \frac{1}{2}\partial_\mu\left[\partial^\nu\varphi(x)\delta_{\mu\nu} + \partial_\nu\varphi(x)g^{\mu\nu}\right] = 0\\
&\Leftrightarrow -m^2\varphi(x) - \partial_\mu(\partial^\mu\varphi(x)) = 0\\
&\Leftrightarrow m^2\varphi(x) + \partial^2\varphi(x) = 0\\
&\Leftrightarrow (m^2 + \Box)\varphi(x) = 0 \qquad (2.1.0.6)
\end{aligned}
$$

với

$$\Box \equiv \partial^2 \equiv \partial_\mu\partial^\mu. \qquad (2.1.0.7)$$

$\Box$ được gọi là toán tử d'Alembert. Phương trình (2.1.0.6) gọi là phương trình Klein - Gorden. Mỗi trường tương ứng với một hàm Lagrangian khác nhau, dựa vào phương trình Euler - Lagrange ta có thể dễ dàng tìm được phương trình chuyển động của các trường khác nhau.

Vậy làm thế nào để xây dựng Lagrangian và Lagrangian phải thỏa mãn các điều kiện gì ?

Vì Lagrangian là một đại lượng vô hướng nên nó phải bất biến Lorentz và là một hàm thực. Mặc khác vì Lagrangian được dùng để tính tác dụng tối thiểu $S = \int dx^4 L$, và x có đơn vị $\frac{1}{\text{eV}}$ nên L có đơn vị eV^4. Ngoài ra tùy từng hệ mà ta có thể áp đặt thêm các tính chất đối xứng khác nữa lên Lagrangian.

Như vậy trong thực tế có thể xây dựng được nhiều Lagrangian, tuy nhiên các Lagrangian sẽ cho các tiên đoán khác nhau. Kết quả thực nghiệm sẽ là thước đo kiểm tra tính đúng đắn của Lagrangian đó.

2.2 Phương trình cho sóng điện từ tự do

2.2.1 Lagrangian và Phương trình cho sóng điện từ tự do

Đối với bài toán tán xạ Compton ta xét gồm có photon tương tác với hạt electron. Các hạt trước và sau khi tiến lại gần tương tác được mô tả bởi các trường tự do có năng lượng, xung lượng xác định. Như ta đã biết photon mang lưỡng tính sóng - hạt, có spin bằng 1, hạt không mang khối lượng và trường của photon chính là trường điện từ. Trường điện từ (còn gọi là trường Maxwell) là một trong những trường của vật lý học, gồm điện trường và từ trường biến thiên theo thời gian và lan truyền trong không gian. Đặc trưng cho khả năng tương tác của trường điện từ là bốn đại lượng vec tơ: cường độ điện trường $\overrightarrow{E}$, cảm ứng điện $\overrightarrow{D}$, cảm ứng từ $\overrightarrow{B}$ và cường độ từ trường $\overrightarrow{H}$.

Ngoài các đại lượng điện từ trên, đặc trưng cho tính chất điện từ của môi trường người ta còn đưa vào các tham số vĩ mô: hệ số điện thẩm ε, hệ số từ thẩm

μ và độ dẫn điện λ. Để mô tả trường điện từ, nhà vật lý người Anh James Clerk Maxwell đã đưa ra hệ phương trình Maxwell nổi tiếng, đặt cơ sở cho ngành điện từ:

$$\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{B} = 0, \tag{1.4.a}$$
$$\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{D} = \rho, \tag{1.4.b}$$
$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{H} = \overrightarrow{J} + \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t}, \tag{1.4.c}$$
$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}, \tag{1.4.d}$$

trong đó $\overrightarrow{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ là toán tử nabla. Để thỏa mãn các phương trình trên thì lúc đó

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A}, \tag{2.2.1.1}$$
$$\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\nabla}\varphi, \tag{2.2.1.2}$$

với $\overrightarrow{A}$ là thế véc tơ, φ là hàm vô hướng.

Trường điện từ có sóng điện từ lan truyền trong môi trường không dẫn và không điện tích $\rho = 0$, $\overrightarrow{j} = 0$ được gọi là trường điện từ tự do. Lúc đó hệ phương trình Maxwell mô tả trường điện từ tự do là

$$\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{B} = 0, \tag{2.2.1.3}$$
$$\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{D} = 0, \tag{2.2.1.4}$$
$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{H} = \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t}, \tag{2.2.1.5}$$
$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}. \tag{2.2.1.6}$$

Đối với vật lý yêu cầu mọi tính toán đều phải bất biến trong các hệ tọa độ. Hệ phương trình Maxwell bất biến Lorentz tuy nhiên nhìn trong không gian ba chiều với các véc tơ $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{E}$ ta không thể thấy rõ điều đó. Để thuận tiện cho việc tính toán ta chuyển sang không gian bốn chiều, sử dụng thế bốn chiều thay cho các véc tơ ba chiều.

Đối với trường điện từ tự do

$$L = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \tag{2.2.1.7}$$

với tensor cường độ trường

$$F^{\mu\nu} = \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu} \tag{2.2.1.8}$$

và $A^\mu = (\varphi; \overrightarrow{A})$, $\partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right)$.

A^μ được gọi là thế bốn chiều, trong lý thuyết trường ta gọi là hàm trường cho trường photon và là hàm số thực.

Từ Lagrangian trên ta sẽ tìm phương trình của trường điện từ tự do. Ta có:

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\ &= -\frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu - \partial^\nu A^\mu \partial_\mu A_\nu + \partial^\nu A^\mu \partial_\nu A_\mu) \\ &= -\frac{1}{2}(\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu). \end{aligned} \tag{2.2.1.9}$$

Thay vào phương trình Euler - Lagrange với lưu ý lúc này thay biến $\varphi(x) = A^\nu$ ta được:

$$\frac{\partial L}{\partial A^\nu} - \partial^\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu A^\nu)}\right) = 0 \tag{2.2.1.10}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial A^\nu}(\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{2}\partial^\mu\left[\frac{\partial}{\partial(\partial^\mu A^\nu)}(\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu)\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \partial^\mu(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = 0 \\ &\Leftrightarrow \partial^\mu F_{\mu\nu} = 0. \end{aligned}$$

Ta thu được phương trình cho sóng điện từ tự do:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0 \tag{2.2.1.11}$$

mang tính tổng quát hệ phương trình Maxwell được viết lại trong không gian bốn chiều. Dễ dàng kiểm tra lại tính đúng đắn của phương trình bằng cách triển khai thành các thành phần tổng.

Trước tiên ta cần tính các thành phần của $F^{\mu\nu}$. Tensor cường độ trường là phản đối xứng, thật vậy $F^{\mu\mu} = 0$ và $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$. Do vậy F chỉ còn 6 thành phần độc lập và được biểu diễn như sau:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ -F^{01} & 0 & F^{12} & F^{13} \\ -F^{02} & -F^{12} & 0 & F^{23} \\ -F^{03} & -F^{13} & -F^{23} & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2.1.12}$$

Vì $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ nên ta suy ra

$$F^{01} = \frac{\partial A^1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad F^{02} = \frac{\partial A^2}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad F^{03} = \frac{\partial A^3}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

so sánh với (2.2.1.2) ta được $F^{01} = -E_1$, $F^{02} = -E_2$, $F^{03} = -E_3$;

$$F^{12} = -\frac{\partial A^2}{\partial x} + \frac{\partial A^1}{\partial y}, \quad F^{13} = -\frac{\partial A^3}{\partial x} + \frac{\partial A^1}{\partial z}, \quad F^{23} = -\frac{\partial A^3}{\partial y} + \frac{\partial A^2}{\partial z},$$

so sánh với (2.2.1.1) ta được $F^{12} = -B_3$, $F^{13} = B_2$, $F^{23} = -B_1$.
Ta viết lại

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2.1.13}$$

Chú ý thêm rằng $F_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} F^{\rho\sigma}$ nên ta thu được

$$\begin{aligned} F_{01} = -F^{01}, \quad F_{02} = -F^{02}, \quad F_{03} &= -F^{03}; \\ F_{12} = F^{12}, \quad F_{13} = F^{13}, \quad F_{23} &= F^{23}. \end{aligned}$$

Trở lại phương trình cho sóng điện từ tự do (2.2.1.11) với

$$\begin{aligned} \nu = 0 &\Rightarrow \partial^0 F_{00} + \partial^1 F_{01} + \partial^2 F_{02} + \partial^3 F_{03} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z} = 0 \\ &\Leftrightarrow \vec{\nabla}.\vec{E} = 0\ ; \\ \nu = 1 &\Rightarrow \partial^0 F_{10} + \partial^1 F_{11} + \partial^2 F_{12} + \partial^3 F_{13} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial(-E_1)}{\partial t} - \frac{\partial(-B_3)}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial z} = 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{\partial E_1}{\partial t} + \frac{\partial B_3}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial z} = 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{\partial E_1}{\partial t} + [\vec{\nabla} \wedge \vec{B}]_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow [\vec{\nabla} \wedge \vec{B}]_1 = \frac{\partial E_1}{\partial t}. \end{aligned}$$

Tương tự ta có $[\vec{\nabla} \wedge \vec{B}]_2 = \frac{\partial E_2}{\partial t}$, $[\vec{\nabla} \wedge \vec{B}]_3 = \frac{\partial E_3}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

Hai công thức trên phù hợp hoàn toàn với phương trình Maxwell (1.4.b), (1.4.c) thuộc không gian ba chiều với trường hợp trường tự do. Nghĩa là việc ta sử dụng phương trình Euler - Lagrange để tìm ra phương trình của trường điện từ tự do và Lagrangian tính theo biểu thức (2.2.1.7) là chính xác và mang tính tổng quát. Mối quan hệ giữa Lagrangian và $\vec{E}$, $\vec{B}$ được biểu diễn như sau

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4}\big(F^{\mu 0} F_{\mu 0} + \sum_{i=1}^{3} F^{\mu i} F_{\mu i}\big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4}\big(F^{00}F_{00} + \sum_{j=1}^{3} F^{j0}F_{j0} + \sum_{i=1}^{3} F^{0i}F_{0i} + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} F^{ji}F_{ji}\big)\\
&= -\frac{1}{4}\big(2\sum_{i=1}^{3} F^{0i}F_{0i} + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} F^{ji}F_{ji}\big)\\
&= -\frac{1}{2}\big(F^{01}F_{01} + F^{02}F_{02} + F^{03}F_{03} + F^{12}F_{12} + F^{13}F_{13} + F^{23}F_{23}\big)\\
&= -\frac{1}{2}\big(-E_1^2 - E_2^2 - E_3^2 + B_1^2 + B_2^2 + B_3^2\big)\\
&= \frac{1}{2}\big(\overrightarrow{B}^2 - \overrightarrow{E}^2\big). \qquad (2.2.1.14)
\end{aligned}
$$

Từ phương trình (2.2.1.11) ta viết lại dưới dạng phương trình của thế A_μ

$$
\begin{aligned}
&\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0\\
&\Rightarrow \partial^\mu(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = 0\\
&\Rightarrow \partial^\mu\partial_\mu A_\nu - \partial^\mu\partial_\nu A_\mu = 0\\
&\Rightarrow \Box A_\nu - \partial_\nu(\partial^\mu A_\mu) = 0, \qquad (2.2.1.15)
\end{aligned}
$$

giải phương trình trên ta sẽ được nghiệm A^μ. Tuy nhiên ở đây ta thấy rõ ràng A^μ là hàm thế và không thể giải chính xác được, kết quả luôn luôn sai khác một hằng số. Ta có thể kiểm tra lại bằng cách thay vào phương trình (2.2.1.15) phép biến đổi gauge

$$A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu\Lambda, \qquad (2.2.1.16)$$

trong đó Λ là hàm vô hướng. Suy ra

$$
\begin{aligned}
\Box(A_\nu + \partial_\nu\Lambda) - \partial_\nu\partial^\mu(A_\mu + \partial_\mu\Lambda) &= \Box A_\nu - \partial_\nu(\partial^\mu A_\mu) + \Box\partial_\nu\Lambda - \partial_\nu\partial^\mu\partial_\mu\Lambda\\
&= \Box A_\nu - \partial_\nu(\partial^\mu A_\mu). \qquad (2.2.1.17)
\end{aligned}
$$

Ta cũng thay vào các biểu thức tính $\overrightarrow{B}$ và $\overrightarrow{E}$ và thấy được rằng $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{E}$ không đổi. Từ đó rõ ràng việc giải phương trình (2.2.1.15) sẽ không cho ra kết quả duy nhất. Để đơn giản hóa bài toán và đảm bảo tính bất biến Lorentz ta sẽ chọn điều kiện biên

$$\partial^\mu A_\mu = 0, \qquad (2.2.1.18)$$

biểu thức này gọi là điều kiện Lorentz Gauge. Nếu xét (2.2.1.15) trong Lorentz Gauge ta thu được

$$\Box A_\mu = 0. \qquad (2.2.1.19)$$

Việc làm trên tương ứng với việc thay đổi Lagrangian một số hạng mà ta sẽ tìm bằng cách thay $L \to L^{'} = L + \Delta L$ vào phương trình Euler - Lagrange (2.2.1.10) của trường

$$\frac{\partial(L+\Delta L)}{\partial A^\nu} - \partial^\mu\left[\frac{\partial(L+\Delta L)}{\partial(\partial^\mu A^\nu)}\right] = 0, \qquad (2.2.1.20)$$

vì $L = -\frac{1}{2}(\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu)$ không phụ thuộc vào ∂A^ν nên $\frac{\partial L}{\partial A^\nu} = 0$.
ΔL phải không phụ thuộc tuyến tính vào ∂A^ν để cho phương trình (2.2.1.15) trở thành phương trình Lorentz Gauge, và từ (2.2.1.10) ta có biến đổi

$$\partial^\mu \frac{\partial(\Delta L)}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} = -\partial^\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} = \partial^\mu F_{\mu\nu}. \tag{2.2.1.21}$$

Từ (2.2.1.15) và (2.2.1.19) ta thu được

$$\partial^\mu \frac{\partial(\Delta L)}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} = -\partial_\nu(\partial^\mu A_\mu), \tag{2.2.1.22}$$

suy ra

$$\Delta L = -\frac{1}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2. \tag{2.2.1.23}$$

Vậy hàm Lagrangian xét trong Lorentz Gauge có dạng

$$L^{'} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2. \tag{2.2.1.24}$$

Trong trường hợp tổng quát người ta có thể chọn điều kiện R_ξ gauge

$$L^{'} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2. \tag{2.2.1.25}$$

Các kết quả tính toán sẽ không phụ thuộc vào giá trị của ξ. Đây là cách để kiểm tra xem kết quả tính toán có bất biến Gauge không.

Mặc khác trong không gian ba chiều ta có phương trình của sóng điện trường

$$\overrightarrow{E} = E_o.e^{i(\omega t - \overrightarrow{k}\overrightarrow{x})} = E_o.e^{ip^\mu x_\mu}, \tag{2.2.1.26}$$

với $p^\mu = (E, \overrightarrow{p})$ là véc tơ xung lượng trong không gian bốn chiều. Trong hệ đơn vị tự nhiên ta có $E = \omega, \overrightarrow{p} = \overrightarrow{k}$ nên lúc đó véc tơ $p^\mu = (\omega, \overrightarrow{k})$. Tương tự trong không gian bốn chiều phương trình (2.2.1.19) có nghiệm

$$A_\mu = \epsilon_\mu(p, \sigma)e^{ip^\nu x_\nu}, \tag{2.2.1.27}$$

thay vào (2.2.1.19) ta có

$$\begin{aligned}
&\partial^\nu \partial_\nu (e^{ip^\mu x_\mu}) = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\partial^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}(e^{ip^\mu x_\mu}) = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\partial^\nu (ip_\mu \delta_{\mu\nu} e^{ip^\mu x_\mu}) = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\frac{\partial}{\partial x_\nu}(ip_\nu)(e^{ip^\mu x_\mu}) = 0 \\
\Leftrightarrow\ &p^\nu p_\nu = 0.
\end{aligned} \tag{2.2.1.28}$$

Nếu triển khai biểu thức này ra ta sẽ nhận được kết quả đúng

$$p^\nu p_\nu = 0 \Leftrightarrow p^0 p_0 + p^i p_i = E^2 - |\overrightarrow{p}|^2 = 0. \tag{2.2.1.29}$$

Theo hệ thức Einstein ta có

$$E^2 - |\overrightarrow{p}|^2 = m^2, \tag{2.2.1.30}$$

đối với trường photon thì $m = 0$ nên từ đó ta thấy $p^\nu p_\nu = 0$ là đúng đắn. Ngoài ra phương trình (2.2.1.19) còn có nghiệm liên hợp phức

$$A_\mu = \epsilon^*_\mu(p, \sigma).e^{-ip^\nu x_\nu}, \tag{2.2.1.31}$$

lúc đó ta sẽ có nghiệm tổng quát

$$A_\mu = a.\epsilon_\mu(p, \sigma).e^{ip^\nu x_\nu} + b.\epsilon^*_\mu(p, \sigma).e^{-ip^\nu x_\nu}. \tag{2.2.1.32}$$

Vì trong không gian có nhiều sóng ứng với nhiều véc tơ xung lượng và các véc tơ xung lượng là véc tơ liên tục nên ta sẽ lấy tích phân biểu thức trên. Mặc khác A là hàm thực nên $b = a^\dagger$. Ta được:

$$A^\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d\overrightarrow{p}}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\sigma=0}^{3} (\epsilon^\mu(p,\sigma)a(p,\sigma)e^{-ipx} + \epsilon^{\mu *}(p,\sigma)a^\dagger(p,\sigma)e^{ipx}), \tag{2.2.1.33}$$

trong đó $a(p, \sigma), a^\dagger(p, \sigma)$ là các hệ số, $\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}$ là hệ số chuẩn hóa. Vì A^μ có bốn thành phần nên $\sigma = \overline{0, 3}$.

Véc tơ $\epsilon_\mu(p, \sigma)$ và $\epsilon^{\mu *}(p, \sigma)$ gọi là véc tơ phân cực, đặc trưng cho khả năng định hướng của sóng. Thay nghiệm vào biểu thức Lorentz Gauge ta thu được

$$\epsilon_\mu p^\mu = 0. \tag{2.2.1.34}$$

2.2.2 Tổng véc tơ phân cực

Bây giờ, quay trở lại bài toán thực tế, giả sử photon chuyển động dọc theo trục z, đặt $p^\mu = E(1, 0, 0, 1)$. Ta chọn hệ véc tơ cơ sở cho không gian bốn chiều

$$\begin{aligned} \epsilon^\mu(p, 1) &= (0, 1, 0, 0), \\ \epsilon^\mu(p, 2) &= (0, 0, 1, 0), \\ \epsilon^\mu(p, 0) &= (1, 0, 0, 0), \\ \epsilon^\mu(p, 3) &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned} \tag{2.2.2.1}$$

$$\Rightarrow \epsilon^\mu(p, \sigma)\epsilon_\mu(p, \sigma') = g_{\sigma\sigma'} = \begin{cases} 1 & \sigma = \sigma' = 0 \\ 0 & \sigma \neq \sigma' \\ -1 & \sigma = \sigma' = 1, 2, 3 \end{cases}. \tag{2.2.2.2}$$

Trong hệ véc tơ cơ sở trên có hai véc tơ $\epsilon^\mu(p,0)$ và $\epsilon^\mu(p,3)$ là hai véc tơ phân cực mang tính chất phi vật lý vì không tồn tại trong thực tế nên ta chỉ cần tính tổng các véc tơ thành phần vật lý. Bốn véc tơ lập thành hệ cơ sở không gian bốn chiều phải thỏa mãn điều kiện chuẩn hóa trực giao

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma=0,1,2,3} \epsilon_\mu(p,\sigma)\epsilon_\nu(p,\sigma) = \delta_{\mu\nu} \qquad (2.2.2.3)\\
\Rightarrow\ &\epsilon_\mu(p,0)\epsilon_\nu(p,0) - \sum_{\sigma=1,2,3} \epsilon_\mu(p,\sigma)\epsilon_\nu(p,\sigma) = g_{\mu\nu}\\
\Rightarrow\ &\sum_{\sigma=1,2} \epsilon_\mu(p,\sigma)\epsilon_\nu(p,\sigma) = -g_{\mu\nu} + \epsilon_\mu(p,0)\epsilon_\nu(p,0) - \epsilon_\mu(p,3)\epsilon_\nu(p,3).
\end{aligned}$$

Mà

$$\epsilon_\mu(p,3) = \frac{p_\mu}{E} - \epsilon_\mu(p,0) \qquad (2.2.2.4)$$

nên suy ra

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma=1,2} \epsilon_\mu(p,\sigma)\epsilon_\nu(p,\sigma) &= -g_{\mu\nu} + \epsilon_\mu(p,0)\epsilon_\nu(p,0) - \left(\frac{p_\mu}{E} - \epsilon_\mu(p,0)\right)\left(\frac{p_\nu}{E} - \epsilon_\nu(p,0)\right)\\
&= -g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{E^2} + \frac{p_\mu\epsilon_\nu(p,0) + p_\nu\epsilon_\mu(p,0)}{E}\\
&= -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu\eta_\nu + p_\nu\eta_\mu}{(p.\eta)} - \frac{\eta^2 p_\mu p_\nu}{(p.\eta)^2}, \qquad (2.2.2.5)
\end{aligned}$$

ở đây ta đã đặt $\eta_\mu = \epsilon_\mu(p,0)$. Vậy

$$\sum_{\sigma=1,2} \epsilon_\mu(p,\sigma).\epsilon_\nu(p,\sigma) = -g_{\mu\nu} + Q_{\mu\nu}, \qquad (2.2.2.6)$$

với

$$Q_{\mu\nu} = \frac{p_\mu\eta_\nu + p_\nu\eta_\mu}{(p.\eta)} - \frac{\eta^2 p_\mu p_\nu}{(p.\eta)^2}. \qquad (2.2.2.7)$$

Vì Lagrangian bất biến với phép biến đổi gauge nên kết quả tiên đoán các đại lượng vật lý sẽ không phụ thuộc vào η.

Đây là công cụ để kiểm tra tính đúng đắn trong việc giải toán. Tuy nhiên ở đây η phải thỏa mãn hai điều kiện

$$\begin{aligned}
\eta^\mu\epsilon_\mu(p,\sigma) &= 0, \quad \sigma = 1,2,\\
\eta^\mu p_\mu &\neq 0.
\end{aligned} \qquad (2.2.2.8)$$

Biểu thức (2.2.2.6) sẽ được áp dụng để tính toán vào quá trình tán xạ Compton mà ta sẽ thực hiện ở chương hai. Tiếp tục ta cần nhắc lại về tính chất của hạt photon là hạt không có khối lượng và có spin $S = 1$. Véc tơ phân cực chính là véc tơ riêng của toán tử hình chiếu spin lên phương chuyển động ứng với hai giá trị riêng là ±1. Đầu tiên ta xét trường hợp đơn giản hạt chuyển động theo trục z để tìm véc tơ phân cực. Gọi toán tử spin là $\overrightarrow{S}$ thì $\overrightarrow{S}.\overrightarrow{z}$ là hình chiếu toán tử lên phương chuyển động. Ta có phương trình trị riêng

$$(\overrightarrow{S}.\overrightarrow{z})\epsilon^{\mu}(p,\sigma) = \sigma\epsilon^{\mu}(p,\sigma), \tag{2.2.2.9}$$

với $(\overrightarrow{S}.\overrightarrow{z})$ là toán tử hình chiếu.
Phương trình này có hai nghiệm ứng với hai trạng thái của hạt [2]

$$\begin{aligned} \epsilon^{\mu}(p,1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\ (0,-1,-i,0), \\ \epsilon^{\mu}(p,-1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\ (0,1,-i,0). \end{aligned} \tag{2.2.2.10}$$

Xét trường hợp photon chuyển động trên một phương bất kì, ta phải quay hệ tọa độ quanh trục z, lúc đó $xyz \to x'y'z'$ và $\overrightarrow{P_{x'y'z'}} = R.\overrightarrow{P_{xyz}}$ với

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta\cos\gamma - \sin\varphi\sin\gamma & -\cos\varphi\cos\theta\sin\gamma - \sin\varphi\cos\gamma & \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\theta\cos\gamma + \cos\varphi\sin\gamma & -\sin\varphi\cos\theta\sin\gamma + \cos\varphi\cos\gamma & \sin\varphi\sin\theta \\ -\sin\theta\cos\gamma & \sin\theta\sin\gamma & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{2.2.2.11}$$

trong đó φ, θ, γ là ba góc Euler. Chú ý phép quay trong không gian ba chiều nên thành phần thời gian không đổi, ta chỉ xét các thành phần không gian.
Véc tơ xung lượng trong hệ tọa độ Ox'y'z' được xác định

$$\overrightarrow{P_{x'y'z'}} = ER\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = E(\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta) \tag{2.2.2.12}$$

$$\Rightarrow p^{\mu} = E(1, \cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta); \tag{2.2.2.13}$$

một cách tương tự ta có hai véc tơ phân cực xét trong hệ tọa độ Ox'y'z'

$$\epsilon^{\mu}(p,1) = R\begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-i\gamma}(0, -\cos\theta\cos\varphi + i\sin\varphi, -\cos\theta\sin\varphi - i\cos\varphi, \sin\theta), \tag{2.2.2.14}$$

$$\epsilon^{\mu}(p,-1) = R\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} = e^{i\gamma}(0, \cos\theta\cos\varphi + i\sin\varphi, \cos\theta\sin\varphi - i\cos\varphi, -\sin\theta). \tag{2.2.2.15}$$

Với biểu diễn tường minh của các véc tơ phân cực, ta có thể tính được đóng góp của từng trạng thái phân cực vào tiết diện tán xạ toàn phần, hoặc chúng ta có thể so sánh trực tiếp với các tiết diện tán xạ phân cực đo được trong thực nghiệm. Việc làm này sẽ giúp chúng ta kiểm tra tính đúng đắn của lý thuyết.

2.2.3 Lượng tử hóa hàm trường sóng điện từ tự do

Trong cơ học lượng tử, các đại lượng vật lý (có thể đo được) trở thành các toán tử.

Trong lý thuyết trường lượng tử, không những các đại lượng vật lý mà kể cả các hàm trường cũng trở thành các toán tử. Tương ứng với mỗi hàm trường ta sẽ có một đại lượng gọi là xung lượng chính tắc. Đại lượng này không phải là xung lượng p^μ mà mang tính tổng quát hơn. Tuy nhiên trong một số trường hợp đại lượng này lại cho kết quả bằng xung lượng. Nó được định nghĩa như sau:

$$\pi^\mu = (\pi^0, \pi^i), \tag{2.2.3.1}$$

với

$$\pi^0 = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 A_0)} \quad ; \quad \pi^i = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 A_i)}. \tag{2.2.3.2}$$

Ta tính hai đại lượng sau:

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_0)}\left[-\frac{1}{2}(\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu) - \frac{1}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_0)}(\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu) - \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_0)}(\partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu) + 2(\partial^\rho A_\rho)\frac{\partial(\partial^\mu A_\mu)}{\partial(\partial_0 A_0)}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left[2\partial^\mu A^\nu \frac{\partial(\partial_\mu A_\nu)}{\partial(\partial_0 A_0)} - 2\partial^\mu A^\nu \frac{\partial(\partial_\nu A_\mu)}{\partial(\partial_0 A_0)} + 2(\partial^\rho A_\rho)\frac{\partial(\partial^\mu A_\mu)}{\partial(\partial_0 A_0)}\right] \\
&= -\frac{1}{2}(2\partial^0 A^0 - 2\partial^0 A^0 + 2\partial^\rho A_\rho) \\
&= -\partial^\rho A_\rho \ ; \qquad (2.2.3.3) \\
\pi_i &= \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_i)}\left[-\frac{1}{2}(\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu) - \frac{1}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_i)}(\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu) - \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_i)}(\partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu) + 2(\partial^\rho A_\rho)\frac{\partial(\partial^\mu A_\mu)}{\partial(\partial_0 A_i)}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left[2\partial^\mu A^\nu \frac{\partial(\partial_\mu A_\nu)}{\partial(\partial_0 A_i)} - 2\partial^\mu A^\nu \frac{\partial(\partial_\nu A_\mu)}{\partial(\partial_0 A_i)} + 2\partial^\rho A_\rho \frac{\partial(\partial^\mu A_\mu)}{\partial(\partial_0 A_i)}\right] \\
&= -\frac{1}{2}(2\partial^0 A^i - 2\partial^i A^0 + 2\partial^\rho A_\rho .0) \\
&= \partial^i A^0 - \partial^0 A^i, \qquad (2.2.3.4)
\end{aligned}$$

vậy

$$\pi^\mu = (-\partial^\rho A_\rho, \partial^i A^0 - \partial^0 A^i). \tag{2.2.3.5}$$

Ta sẽ lượng tử hóa phương trình (2.2.1.33) bằng cách thay các số hạng thành các toán tử. Tuy nhiên vì $\epsilon^\mu(k,\sigma)$ là một véc tơ không thể thay bằng toán tử nên ta chỉ lượng tử hóa số hạng $a(k,\sigma)$. Trong không gian ba chiều để lượng tử hóa ta sử dụng các biểu thức

$$[x, p_y] = i\hbar \quad ; \quad [x, y] = 0 \quad ; \quad [p_x, p_y] = 0. \tag{2.2.3.6}$$

Tương tự trong không gian bốn chiều, lưu ý $A^\mu(x)$ và $\pi^\nu(y)$ đóng vai trò tương đương như x và p ta có

$$[A^\mu(x); \pi^\nu(y)] = -ig^{\mu\nu}\delta(x-y), \tag{2.2.3.7}$$

và

$$[A^\mu(x); A^\nu(y)] = 0, \tag{2.2.3.8}$$
$$[\pi^\mu(x); \pi^\nu(y)] = 0. \tag{2.2.3.9}$$

Chú ý ở đây các đại lượng phải xét ở cùng một thời điểm t. Nếu thừa nhận các biểu thức trên ta sẽ đi tìm mối quan hệ giữa $a(k,\sigma)$ và $a^\dagger(k,\sigma)$. Có

$$\partial^i[A^\mu(\overrightarrow{x},t), A^\nu(\overrightarrow{y},t)] = 0 \tag{2.2.3.10}$$
$$\Rightarrow [\partial^i A^\mu(\overrightarrow{x},t), A^\nu(\overrightarrow{y},t)] = 0 \tag{2.2.3.11}$$
$$\Rightarrow [A^\mu(\overrightarrow{x},t), -\partial^0 A^\nu(\overrightarrow{y},t)] = -ig^{\mu\nu}\delta(x-y). \tag{2.2.3.12}$$

Xét

$$\partial^0 A^\nu(y) = \frac{i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int \frac{d\overrightarrow{p}}{\sqrt{2E_p}}\sum_{\sigma'=0}^{3} E_p\Big(-\epsilon^\nu(p,\sigma')a(p,\sigma')e^{-ipy} + \epsilon^{\nu *}(p,\sigma')a^\dagger(p,\sigma')e^{ipy}\Big), \tag{2.2.3.13}$$

thêm vào đó

$$[a(k,\sigma), a(p,\sigma')] = 0, \tag{2.2.3.14}$$
$$[a^\dagger(k,\sigma), a^\dagger(p,\sigma')] = 0, \tag{2.2.3.15}$$

ta suy ra

$$\begin{aligned}
&[A^\mu(\overrightarrow{x},t), -\partial^0 A^\nu(\overrightarrow{y},t)]\\
&= \frac{-i}{2.(2\pi)^3}\sqrt{\frac{E_p}{E_k}}\int\int d\overrightarrow{k}\, d\overrightarrow{p}\sum_{\sigma=0}^{3}\sum_{\sigma'=0}^{3} \Big(\epsilon^\mu(k,\sigma)\epsilon^{\nu *}(p,\sigma')e^{-ikx+ipy}[a(k,\sigma), a^\dagger(p,\sigma')]\\
&\qquad -\epsilon^{\mu *}(k,\sigma)\epsilon^\nu(p,\sigma')e^{ikx-ipy}[a^\dagger(k,\sigma), a(p,\sigma')]\Big)\\
&= \frac{-i}{2.(2\pi)^3}\sqrt{\frac{E_p}{E_k}}\int\int d\overrightarrow{k}\, d\overrightarrow{p}\sum_{\sigma=0}^{3}\sum_{\sigma'=0}^{3} \Big(\epsilon^\mu(k,\sigma)\epsilon^{\nu *}(p,\sigma')e^{-ikx+ipy}[a(k,\sigma), a^\dagger(p,\sigma')]\\
&\qquad +\epsilon^{\mu *}(k,\sigma)\epsilon^\nu(p,\sigma')e^{ikx-ipy}[a(p,\sigma'), a^\dagger(k,\sigma)]\Big)\\
&= \frac{-i}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{E_p}{E_k}}\int\int d\overrightarrow{k}\, d\overrightarrow{p}\sum_{\sigma=0}^{3}\sum_{\sigma'=0}^{3} \Big(\epsilon^\mu(k,\sigma)\epsilon^{\nu *}(p,\sigma')e^{-ikx+ipy}[a(k,\sigma), a^\dagger(p,\sigma')]\Big).
\end{aligned} \tag{2.2.3.16}$$

Ở đây ta có biến đổi trên vì số hạng thứ nhất trong biểu thức tương đương với số hạng thứ hai.

Mặt khác từ (2.2.3.12) và

$$\sum_{\sigma=0}^{3}\sum_{\sigma'=0}^{3}\epsilon^{\mu}(k,\sigma)\epsilon^{\nu *}(p,\sigma')g^{\sigma\sigma'} = g^{\mu\nu}, \qquad (2.2.3.17)$$

nên suy ra

$$[a(k,\sigma), a^{\dagger}(p,\sigma')] = \delta(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{k})g^{\sigma\sigma'}. \qquad (2.2.3.18)$$

Thật vậy thay lại vào biểu thức trên và biến đổi

$$\begin{aligned}
&[A^{\mu}(\overrightarrow{x},t), -\partial^0 A^{\nu}(\overrightarrow{y},t)]\\
&= \frac{-i}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{E_p}{E_k}}\int\int d\overrightarrow{k}\, d\overrightarrow{p}\sum_{\sigma=0}^{3}\sum_{\sigma'=0}^{3}\Big(\epsilon^{\mu}(k,\sigma)\epsilon^{\nu *}(p,\sigma')e^{-ikx+ipy}\delta(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{k})g^{\sigma\sigma'}\Big)\\
&= \frac{-i}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{E_k}{E_k}}\int d\overrightarrow{k}\, e^{-ik(x-y)}g^{\mu\nu}\\
&= -ig^{\mu\nu}\delta(x-y).
\end{aligned}$$

Ở đây ta đã áp dụng một số tính chất của hàm Delta - Dirac

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)f(x)dx = f(a), \qquad (2.2.3.19)$$

$$\delta(\overrightarrow{x}) = \int\frac{d\overrightarrow{k}}{(2\pi)^3}e^{i\overrightarrow{k}\overrightarrow{x}}. \qquad (2.2.3.20)$$

2.2.4 Hàm truyền của trường photon tự do

Sau khi lượng tử hóa trường photon ta sẽ đi tìm hàm truyền của photon. Gọi trạng thái chân không của lý thuyết trường lượng tử được kí hiệu $\big|0\big\rangle$ có tính chất toán tử hủy hạt $a(k,\sigma)$ và toán tử sinh hạt $a^{\dagger}(k,\sigma)$ tác dụng lên trạng thái này sẽ lần lượt cho kết quả

$$a(k,\sigma)\big|0\big\rangle = 0 \quad , \quad \big|k,\sigma\big\rangle = Ca^{\dagger}(k,\sigma)\big|0\big\rangle \quad , \quad \big\langle k,\sigma\big| = \big\langle 0\big|Ca(k,\sigma), \qquad (2.2.4.1)$$

với $\big|k,\sigma\big\rangle$ là hạt có xung lượng k và trạng thái phân cực σ, và chú ý

$$a(k,\sigma)\big|0\big\rangle = \big\langle 0\big|a^{\dagger}(k,\sigma), \qquad (2.2.4.2)$$

$$\big\langle 0\big|0\big\rangle = 1. \qquad (2.2.4.3)$$

Thêm nữa

$$\big\langle 0\big|A^{\mu}(x)\big|k,\sigma\big\rangle = \epsilon^{\mu}(k,\sigma)e^{-ikx}, \qquad (2.2.4.4)$$

$$\big\langle k,\sigma\big|A^{\mu}(x)\big|0\big\rangle = \epsilon^{\mu *}(k,\sigma)e^{ikx}, \tag{2.2.4.5}$$

ta sẽ tìm hệ số chuẩn hóa C trong phương trình (2.2.4.1) như sau

$$\big\langle 0\big|A^{\mu}(x)\big|k,\sigma\big\rangle = \big\langle 0\big|\frac{C}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int\frac{d\overrightarrow{k}}{\sqrt{2E_k}}\sum_{\sigma=0}^{3}\epsilon^{\mu}(k,\sigma)a(k,\sigma)a^{\dagger}(k,\sigma)e^{-ikx}\big|0\big\rangle, \tag{2.2.4.6}$$

mà

$$a(k,\sigma)a^{\dagger}(k,\sigma) = [a(k,\sigma),a^{\dagger}(k,\sigma)] + a^{\dagger}(k,\sigma)a(k,\sigma), \tag{2.2.4.7}$$

và từ (2.2.4.1) nên

$$\begin{aligned}\big\langle 0\big|A^{\mu}(x)\big|k,\sigma\big\rangle &= \frac{C}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int\frac{d\overrightarrow{k}}{\sqrt{2E_k}}\sum_{\sigma=0}^{3}\epsilon^{\mu}(k,\sigma)\delta(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{k})g^{\sigma\sigma'}e^{-ikx}\\ &= \frac{C}{\sqrt{2E_p(2\pi)^{\frac{3}{2}}}}\epsilon^{\mu}(p,\sigma)e^{-ipx}.\end{aligned} \tag{2.2.4.8}$$

So sánh với (2.2.4.4) suy ra

$$C = \sqrt{2E_p}(2\pi)^{\frac{3}{2}}. \tag{2.2.4.9}$$

Ta định nghĩa hàm truyền

$$\pi^{\mu\nu} = \big\langle 0\big|\top\big(A^{\mu}(x),A^{\nu}(y)\big)\big|0\big\rangle \tag{2.2.4.10}$$

là xác suất để chuyển trạng thái từ vị trí $x \to y$ của một trường. Trong đó $\top\big(A^{\mu}(x),A^{\nu}(y)\big)$ gọi là hàm trật tự thời gian xuất hiện do nguyên lý nhân quả:

$$\top\big(A^{\mu}(x),A^{\nu}(y)\big) = \theta(x_0-y_0)A^{\mu}(x)A^{\nu}(y) + \theta(y_0-x_0)A^{\nu}(y)A^{\mu}(x). \tag{2.2.4.11}$$

Hàm

$$\theta(x_0-y_0) = \begin{cases}1 & x_0 > y_0\\ 0 & x_0 < y_0\end{cases} \tag{2.2.4.12}$$

và x_0, y_0 là các thành phần thời gian. Ngoài ra hàm có tính chất gián đoạn tại điểm y_0 nên ta có

$$\frac{d\theta(x_0-y_0)}{dx} = \delta(x_0-y_0). \tag{2.2.4.13}$$

Dựa vào phương trình (2.2.4.10) ta có thể tính hàm truyền trực tiếp bằng cách dùng định nghĩa.

Xét $x_0 > y_0$ lúc đó $\top\big(A^{\mu}(x),A^{\nu}(y)\big) = A^{\mu}(x)A^{\nu}(y)$. Từ định nghĩa hàm truyền (2.2.4.10) và sử dụng tính chất hàm Delta - Dirac suy ra:

$$\pi^{\mu\nu} = \int\int\frac{d\overrightarrow{k}\,d\overrightarrow{p}}{2(2\pi)^3\sqrt{E_kE_p}}\sum_{\sigma=0}^{3}\sum_{\sigma'=0}^{3}\langle 0|\epsilon^{\mu}(k,\sigma)\epsilon^{\nu *}(p,\sigma')a(k,\sigma)a^{+}(p,\sigma')|0\rangle e^{-ikx+ipy}$$

$$= \int\int \frac{d\overrightarrow{k}\, d\overrightarrow{p}}{2(2\pi)^3\sqrt{E_k E_p}} \sum_{\sigma=0}^{3}\sum_{\sigma'=0}^{3} \langle 0|\epsilon^{\mu}(k,\sigma)\epsilon^{\nu *}(p,\sigma')[a(k,\sigma), a^{+}(p,\sigma')]|0\rangle e^{-ikx+ipy}$$
$$= \int\int \frac{d\overrightarrow{k}\, d\overrightarrow{p}}{2(2\pi)^3\sqrt{E_k E_p}} \sum_{\sigma=0}^{3}\sum_{\sigma'=0}^{3} \epsilon^{\mu}(k,\sigma)\epsilon^{\nu *}(p,\sigma')\delta(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{k}) g^{\sigma\sigma'} e^{-ikx+ipy}$$
$$= \int \frac{d\overrightarrow{k}}{2E_k(2\pi)^3} g^{\mu\nu} e^{-ik(x-y)}.$$

Đặt $x_0 - y_0 = \tau$ tổng quát ta có

$$\pi^{\mu\nu} = \int \frac{d\overrightarrow{k}}{2E(2\pi)^3} g^{\mu\nu} \left[\theta(\tau)e^{-i\omega\tau} e^{i\overrightarrow{k}(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y})} + \theta(-\tau)e^{i\omega\tau}e^{-i\overrightarrow{k}(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y})}\right],$$

chuyển $\overrightarrow{k} \to -\overrightarrow{k}$ trong số hạng thứ nhất ta được

$$\pi^{\mu\nu} = \int \frac{d\overrightarrow{k}}{2E(2\pi)^3} g^{\mu\nu} \left[\theta(\tau)e^{-i\omega\tau} + \theta(-\tau)e^{i\omega\tau}\right] e^{-i\overrightarrow{k}(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y})}. \tag{2.2.4.14}$$

Xét

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2 - E^2 + i\epsilon} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(\omega - E + i\epsilon)(\omega + E - i\epsilon)}, \tag{2.2.4.15}$$

ở đây ta bỏ đi số hạng ϵ^2 và viết $2E\epsilon$ thành ϵ vì sau khi hoàn tất tính toán ta sẽ cho $\epsilon \to 0$, suy ra

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2 - E^2 + i\epsilon} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2E}\left(\frac{d\omega}{\omega - E + i\epsilon} - \frac{d\omega}{\omega + E - i\epsilon}\right). \tag{2.2.4.16}$$

Mà $\dfrac{d\omega}{\omega - E + i\epsilon}$ và $\dfrac{d\omega}{\omega + E - i\epsilon}$ lần lượt có điểm kì dị $\omega = E - i\epsilon$, $\omega = -E + i\epsilon$. Theo lý thuyết thặng dư ta có

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega - E + i\epsilon} e^{i\omega\tau} = 2\pi i\theta(-\tau)e^{i\omega\tau} + O(\varepsilon), \tag{2.2.4.17}$$

và

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega + E - i\epsilon} e^{-i\omega\tau} = -2\pi i\theta(\tau)e^{-i\omega\tau} + O(\varepsilon), \tag{2.2.4.18}$$

suy ra

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2 - E^2 + i\epsilon} e^{i\omega\tau} = \frac{2\pi i}{2E}[\theta(\tau)e^{-i\omega\tau} + \theta(-\tau)e^{i\omega\tau}]. \tag{2.2.4.19}$$

Thay vào (2.2.4.14) ta được

$$\pi^{\mu\nu} = \int \frac{d\overrightarrow{k}}{2E(2\pi)^3} g^{\mu\nu} \int \frac{-i2E}{2\pi} \frac{d\omega}{\omega^2 - E^2 + i\epsilon} e^{i\omega\tau} e^{-i\overrightarrow{k}(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y})}$$

$$= \int \frac{dp}{(2\pi)^4} \frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)}. \tag{2.2.4.20}$$

Tuy nhiên ta có thể tính hàm truyền bằng cách khác gọi là phương pháp hàm Green, dùng phương trình chuyển động của trường ta suy ra hàm Green rồi suy ra hàm truyền một cách nhanh chóng. Phương pháp này tính toán ngắn gọn và nhanh chóng hơn, và có ưu điểm là không cần biết nghiệm của phương trình, chỉ từ Lagrangian của trường ta có thể xác định được kết quả. Từ phương trình (2.2.1.19) ta suy ra hàm Green có dạng $\Box\pi^{\mu\nu}$. Ta đi tính giá trị hàm

$$\Box\pi^{\mu\nu} = \big\langle 0 \big| \Box \top \big(A^\mu(x), A^\nu(y) \big) \big| 0 \big\rangle. \tag{2.2.4.21}$$

Để đơn giản giả sử $x_0 > y_0$, chú ý trong trường hợp này ta đạo hàm theo biến x lúc đó ta có:

$$\begin{aligned}
\Box \top \big(A^\mu(x) A^\nu(y) \big) &= \Box \big(\theta(x_0 - y_0) A^\mu(x) A^\nu(y) \big) \\
&= \partial^\rho \big[(\partial_\rho \theta(x_0 - y_0)) A^\mu(x) A^\nu(y) + \theta(x_0 - y_0) \partial_\rho A^\mu(x) A^\nu(y) \big] \\
&= [\Box\theta(x_0 - y_0) A^\mu(x) A^\nu(y) + 2\partial^\rho \theta(x_0 - y_0) \partial_\rho A^\mu(x) A^\nu(y) \\
&\quad + \theta(x_0 - y_0) \Box A^\mu(x) A^\nu(y)] .
\end{aligned} \tag{2.2.4.22}$$

Vì $\Box A^\mu(x) = 0$ và $\theta(x_0 - y_0)$ là hàm chỉ phụ thuộc vào thời gian nên ta viết lại

$$\begin{aligned}
\Box \top \big(A^\mu(x) A^\nu(y) \big) &= \big[(\Box\theta(x_0 - y_0)) A^\mu(x) A^\nu(y) + 2\partial^0 \theta(x_0 - y_0) \partial_0 A^\mu(x) A^\nu(y) \big] \\
&= \big[(\partial^0 \delta(x_0 - y_0)) A^\mu(x) A^\nu(y) + 2\delta(x_0 - y_0) \partial^0 A^\mu(x) A^\nu(y) \big] .
\end{aligned} \tag{2.2.4.23}$$

Xét

$$\int \partial^0 (\delta(x_0 - y_0) A^\mu(x) A^\nu(y)) dx^0 = \int \frac{d(A^\mu(y_0) A^\nu(y))}{dx^0} dx^0 = 0, \tag{2.2.4.24}$$

mà

$$\begin{aligned}
(\partial^0 \delta(x_0 - y_0)) A^\mu(x) A^\nu(y) &= \partial^0 (\delta(x_0 - y_0) A^\mu(x) A^\nu(y)) - \delta(x_0 - y_0) \partial^0 A^\mu(x) A^\nu(y) \\
&= -\delta(x_0 - y_0) \partial^0 A^\mu(x) A^\nu(y),
\end{aligned} \tag{2.2.4.25}$$

suy ra

$$\Box \top \big(A^\mu(x) A^\nu(y) \big) = \delta(x_0 - y_0) \partial^0 A^\mu(x) A^\nu(y). \tag{2.2.4.26}$$

Tương tự đối với trường hợp $x_0 < y_0$ với lưu ý

$$\partial_0 \theta(y_0 - x_0) = -\delta(y_0 - x_0), \tag{2.2.4.27}$$

ta có

$$\Box \top \big(A^\mu(x) A^\nu(y) \big) = -\delta(x_0 - y_0) A^\nu(y) \partial^0 A^\mu(x). \tag{2.2.4.28}$$

Vậy trường hợp tổng quát ta có

$$\begin{aligned}\left\langle 0\middle|\square\top\left(A^\mu(x)A^\nu(y)\right)\middle|0\right\rangle &= \left\langle 0\middle|\delta(x_0-y_0)\partial^0A^\mu(x)A^\nu(y)-\delta(x_0-y_0)A^\nu(y)\partial^0A^\mu(x)\middle|0\right\rangle\\ &= \left\langle 0\middle|\delta(x_0-y_0)\left[\partial^0A^\mu(x),A^\nu(y)\right]\middle|0\right\rangle\\ &= \left\langle 0\middle|ig^{\mu\nu}\delta(x-y)\middle|0\right\rangle\\ &= ig^{\mu\nu}\delta(x-y)\left\langle 0\middle|\middle|0\right\rangle\\ &= ig^{\mu\nu}\delta(x-y). \end{aligned} \tag{2.2.4.29}$$

Để đơn giản trong tính toán ta chuyển kết quả thu được qua không gian xung lượng và lưu ý mọi tính toán sau này đều được thực hiện trong không gian xung lượng. Ta được

$$-\int\frac{dp^4}{(2\pi)^4}p^2\pi^{\mu\nu}(p)e^{-ip(x-y)} = ig^{\mu\nu}\int\frac{dp^4}{(2\pi)^4}e^{-ip(x-y)}, \tag{2.2.4.30}$$

ở đây ta thừa nhận $p^2\to p^2+i\epsilon$. Suy ra

$$\pi^{\mu\nu}(p) = -\frac{ig^{\mu\nu}}{p^2+i\epsilon} \tag{2.2.4.31}$$

là hàm truyền của photon trong không gian xung lượng. Hoặc ta có thể chuyển về không gian tọa độ bằng biểu thức

$$\pi^{\mu\nu}(x-y) = \int\frac{dp^4}{(2\pi)^4}e^{-ip(x-y)}\pi^{\mu\nu}(p). \tag{2.2.4.32}$$

Đó là trường hợp xét điều kiện Lorentz Gauge có phương trình chuyển động như (2.2.1.19) ứng với hàm Lagrangian tính theo (2.2.1.24). Ta mở rộng xét hàm truyền của photon trong trường hợp tổng quát R_ξ gauge, trường có Lagrangian

$$L = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}-\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2.$$

Xét phương trình Euler - Lagrange (2.2.1.10), kết hợp phương trình (2.2.1.11) và (2.2.1.15) ta có

$$-\square A_\mu+\partial_\mu\partial^\nu A_\nu-\frac{1}{2\xi}\partial^\nu\frac{\partial(\partial^\mu A_\mu)^2}{\partial(\partial^\nu A^\mu)} = 0, \tag{2.2.4.33}$$

ở đây

$$-\frac{1}{2\xi}\partial^\nu\frac{\partial(\partial^\mu A_\mu)^2}{\partial(\partial^\nu A^\mu)} = -\frac{1}{\xi}\partial^\nu(\partial^\rho A_\rho)\frac{\partial(\partial^\mu A_\mu)}{\partial(\partial^\nu A^\mu)} = -\frac{1}{\xi}\partial^\nu(\partial^\rho A_\rho)g_{\mu\nu} = -\frac{1}{\xi}\partial_\mu(\partial^\rho A_\rho) \tag{2.2.4.34}$$

$$\Rightarrow \square A_\mu = \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial_\mu\partial^\rho A_\rho. \tag{2.2.4.35}$$

Nhân hai vế cho $g^{\sigma\mu}$ và thực hiện đổi chỉ số $\sigma \to \mu$ ta thu được

$$\Box A^{\mu} = \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^{\mu}\partial^{\rho} A_{\rho} \tag{2.2.4.36}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \Box \top \big(A^{\mu}(x), A^{\nu}(y)\big) &= ig^{\mu\nu}\delta(x-y) + \theta(x_0 - y_0)\left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial^{\mu}\partial^{\rho}A_{\rho}A^{\nu}(y) \\
&+ \theta(y_0 - x_0)A^{\nu}(y)\left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial^{\mu}\partial^{\rho}A_{\rho} \\
&= ig^{\mu\nu}\delta(x-y) + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial^{\mu}\partial_{\rho}\top\big(A^{\rho}(x), A^{\nu}(y)\big)
\end{aligned} \tag{2.2.4.37}$$

$$\Rightarrow \Box \pi^{\mu\nu}(x,y) + \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)\partial^{\mu}\partial_{\rho}\pi^{\rho\nu}(x,y) = ig^{\mu\nu}\delta(x-y). \tag{2.2.4.38}$$

Chuyển qua không gian xung lượng

$$\Rightarrow -\int \frac{dp^4}{(2\pi)^4}\left[p^2\pi^{\mu\nu}(p) + \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)p^{\mu}p_{\rho}\pi^{\rho\nu}(p)\right]e^{-ip(x-y)} = ig^{\mu\nu}\int \frac{dp^4}{(2\pi)^4}e^{-ip(x-y)}$$

$$\Rightarrow p^2\pi^{\mu\nu}(p) + \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)p^{\mu}p_{\rho}\pi^{\rho\nu}(p) = -ig^{\mu\nu}. \tag{2.2.4.39}$$

Đặt

$$\pi^{\mu\nu}(p) = a.g^{\mu\nu} + b.p^{\mu}p^{\nu}, \tag{2.2.4.40}$$

thay vào biểu thức trên và rút gọn ta được

$$\frac{b}{\xi}p^{\mu}p^{\nu}p^2 + \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)ap^{\mu}p^{\nu} + ap^2g^{\mu\nu} = -ig^{\mu\nu}. \tag{2.2.4.41}$$

Đồng nhất hai vế

$$\Rightarrow a = -\frac{i}{p^2}; b = \frac{(1-\xi)i}{p^4} \tag{2.2.4.42}$$

$$\Rightarrow \pi^{\mu\nu}(p) = -\frac{ig^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} + p^{\mu}p^{\nu}\frac{i(1-\xi)}{p^4 + i\epsilon}. \tag{2.2.4.43}$$

Trong trường hợp Lorentz Gauge $\xi = 1$ khi đó (2.2.4.43) trở về dạng (2.2.4.31). Chuyển qua không gian tọa độ

$$\pi^{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{dp^4}{(2\pi)^4}\pi^{\mu\nu}(p)e^{-ip(x-y)}. \tag{2.2.4.44}$$

Tóm tắt

Sau khi nghiên cứu xong trường photon tự do ta rút ra được một số điều quan

trọng:
1/ Hàm Lagrangian của trường điện từ tự do có biểu thức

$$L = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu},$$

với $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$.
Lagrangian của trường bất biến dưới phép biến đổi gauge $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \varphi$.
2/ Phương trình cho sóng điện từ tự do

$$\Box A_\nu - \partial_\nu(\partial^\mu A_\mu) = 0.$$

Xét trong Lorentz Gauge với điều kiện biên $\partial^\mu A_\mu = 0$ lúc đó phương trình trở thành

$$\Box A_\nu = 0.$$

3/Nghiệm của phương trình có dạng

$$A^\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int \frac{d\overrightarrow{k}}{\sqrt{2E}}\sum_{\sigma=0}^{3}(\epsilon^\mu(k,\sigma)a(k,\sigma)e^{-ikx} + \epsilon^{\mu *}(k,\sigma)a^\dagger(k,\sigma)e^{ikx}).$$

4/ Tổng véc tơ phân cực được tính bằng biểu thức

$$\sum_{\sigma=1,2}\epsilon_\mu(p,\sigma)\epsilon_\nu(p,\sigma) = -g_{\mu\nu} + Q_{\mu\nu},$$

với $Q_{\mu\nu} = \dfrac{p_\mu\eta_\nu + p_\nu\eta_\mu}{(p.\eta)} - \dfrac{\eta^2 p_\mu p_\nu}{(p.\eta)^2}$ và η^μ thỏa điều kiện

$$\eta^\mu\epsilon_\mu(p,\sigma) = 0, \quad \sigma = 1,2,$$
$$\eta^\mu p_\mu \neq 0.$$

5/ Các hệ thức giao hoán tử cho các toán tử sinh hủy của trường photon

$$[a(k,\sigma), a(p,\sigma')] = 0,$$
$$[a^\dagger(k,\sigma), a^\dagger(p,\sigma')] = 0,$$
$$[a(k,\sigma), a^\dagger(p,\sigma')] = \delta(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{k})g^{\sigma\sigma'}.$$

6/ Hàm truyền của trường photon xét trong không gian xung lượng cho điều kiện Lorentz Gauge

$$\pi^{\mu\nu}(p) = -\frac{ig^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}.$$

2.3 Phương trình Dirac

2.3.1 Lagrangian và Phương trình Dirac

Quay trở lại bài toán tán xạ Compton mà chúng ta đang xét photon có spin nguyên va chạm với các hạt electron có spin bán nguyên. Phương trình của trường photon tự do hay chính là trường điện từ tự do ta đã vừa nghiên cứu xong, tiếp tục ta cần phải nghiên cứu về trường của các hạt electron với quy trình tương tự như mục 1.4. Tuy nhiên điều khác biệt lớn nhất ở hai trường là spin, điều đó làm cho tính chất của hai trường khác nhau. Vì electron có spin $S = \dfrac{1}{2}$ và để mở rộng ta sẽ đi xây dựng phương trình cho trường của các hạt có spin bán nguyên, có khối lượng và mang điện bao gồm cả electron. Trường như vậy gọi là trường Dirac và ở đây để đơn giản bài toán ta sẽ xét trường của các hạt tự do.

Xuất phát từ phương trình Schördinger trong cơ học lượng tử:

$$H\psi = i\frac{\partial \psi}{\partial t} = E\psi, \tag{2.3.1.1}$$

với H là toán tử năng lượng Halmiton. Phương trình này chỉ đúng cho các hạt chuyển động phi tương đối tính. Khi các hạt chuyển động tương đối tính thì ta cần phải sửa đổi nó.

Đặt

$$H = \overrightarrow{\alpha}\overrightarrow{p} + m\beta \tag{2.3.1.2}$$

($\overrightarrow{\alpha}, \beta$ là các ma trận),

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow E^2 = H^2 = (\alpha_i p_i + m\beta)(\alpha_j p_j + m\beta) = p^2 + m^2\\
&\Rightarrow \alpha_i p_i \alpha_j p_j + \alpha_i p_i m\beta + m\beta\alpha_j p_j + (m\beta)^2 = p^2 + m^2\\
&\Rightarrow \frac{1}{2}(\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i)p_i p_j + mp_i(\alpha_i\beta + \beta\alpha_i) + (m\beta)^2 = p^2 + m^2.
\end{aligned} \tag{2.3.1.3}$$

Đồng nhất hai vế suy ra

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i &= -2g^{ij}\\ \alpha_i\beta + \beta\alpha_i &= 0\\ \beta^2 &= 1. \end{cases} \tag{2.3.1.4}$$

Đặt

$$\beta = \gamma^0 \quad ; \quad \beta\alpha_i = \gamma^i \tag{2.3.1.5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_i\beta^2\alpha_j + \alpha_j\beta^2\alpha_i &= -2g^{ij}\\ (\beta\alpha_i)\beta + \beta(\beta\alpha_i) &= 0\\ \beta^2 &= 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i &= 2g^{ij}\\ \gamma^i\gamma^0 + \gamma^0\gamma^i &= 0\\ \gamma_0^2 &= 1 \end{cases}. \tag{2.3.1.6}$$

Tổng quát tính chất của các ma trận này

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \tag{2.3.1.7}$$

với $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ được gọi là ma trận Dirac. Có rất nhiều dạng biểu diễn γ trong đó có hai cách biểu diễn phổ biến:

Biểu diễn Chiral/Weyl

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{I} & 0 \end{pmatrix}; \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma^\mu} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.3.1.8}$$

với

$$\sigma^\mu = (1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad , \quad \bar{\sigma^\mu} = (1, -\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3), \tag{2.3.1.9}$$

và σ^i là các ma trận Pauli thỏa mãn các tính chất

$$[\sigma^i, \sigma^j] = 2i\varepsilon^{ijk}\sigma^k, \tag{2.3.1.10}$$

$$\sigma^i\sigma^j = i\varepsilon^{ijk}\sigma^k \text{ với } i \neq j,\ \varepsilon^{123} = 1, \tag{2.3.1.11}$$

$$\sigma^i\sigma^i = 1. \tag{2.3.1.12}$$

Biểu diễn chuẩn

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & -\mathrm{I} \end{pmatrix}; \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.3.1.13}$$

Các ma trận này đều là ma trận 4×4 vì đang xét trong không gian bốn chiều. Ta có vài tính chất sau:

$$\gamma_0\gamma_\mu^\dagger\gamma_0 = \gamma_\mu, \tag{2.3.1.14}$$

$$\gamma_0^\dagger = \gamma_0. \tag{2.3.1.15}$$

Ngoài ra người ta còn đưa thêm ma trận mới

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \tag{2.3.1.16}$$

ta sẽ tính ma trận này trong biểu diễn Chiral như sau

$$\begin{aligned} \gamma^5 &= i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= i\sigma^1\sigma^2\sigma^3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= i^2\sigma^3\sigma^3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.3.1.17}$$

Mặc khác từ phương trình Schördinger và nhân β cho hai vế

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \beta(\overrightarrow{\alpha}\,\overrightarrow{p} + m\beta)\psi = i\beta\frac{\partial\psi}{\partial t}\\
&\Rightarrow (\gamma^i p_i + m)\psi = i\gamma^0\frac{\partial\psi}{\partial t}\\
&\Rightarrow -i\gamma^0\partial_0\psi + \gamma^i p_i\psi + m\psi = 0,
\end{aligned} \tag{2.3.1.18}$$

mà $p_i = -i\dfrac{\partial}{\partial x^i} = -i\partial_i$ nên

$$-i\gamma^0\partial_0\psi - i\gamma^i\partial_i\psi + m\psi = 0, \tag{2.3.1.19}$$

suy ra

$$-i\gamma^\mu\partial_\mu\psi + m\psi = 0. \tag{2.3.1.20}$$

Phương trình trên gọi là phương trình Dirac cho trường của các hạt tự do có spin bằng $\dfrac{1}{2}$ và có khối lượng m. Tuy nhiên đây chỉ là phương trình được suy ra từ phương trình Schördinger. Ta có thể đưa ra phương trình này bằng cách sử dụng Lagrangian và phương trình Euler - Lagrange của trường

$$L = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu\psi) - m\bar{\psi}\psi, \tag{2.3.1.21}$$

ở đây $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0$ và $\bar{\psi}\psi$ bất biến Lorentz. Đó là điều kiện tổng quát của mọi lý thuyết. ψ được gọi là Dirac spinor, $\bar{\psi}$ được gọi là Dirac adjoint spinor. Đây là các spinor có bốn thành phần, mỗi thành phần là một hàm số phức. Quay lại việc tìm phương trình chuyển động của trường, xuất phát từ phương trình Euler - Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial\bar{\psi}} - \partial^\nu\frac{\partial L}{\partial\big(\partial^\nu\bar{\psi}\big)} = 0 \tag{2.3.1.22}$$

$$\Rightarrow i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0.$$

Ta thu được phương trình (2.3.1.20). Tương tự phương trình (2.3.1.22) với chú ý đạo hàm theo biến ψ ta có

$$\frac{\partial L}{\partial\psi} - \partial^\nu\frac{\partial L}{\partial(\partial^\nu\psi)} = 0 \tag{2.3.1.23}$$

$$\Rightarrow -m\bar{\psi} - i\partial^\nu\left(\bar{\psi}\gamma_\mu\frac{\partial(\partial^\mu\psi)}{\partial(\partial^\nu\psi)}\right) = 0 \tag{2.3.1.24}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow -m\bar{\psi} - i\partial^\nu(\bar{\psi}\gamma_\nu) = 0\\
&\Leftrightarrow -m\bar{\psi} - i(\partial^\nu\bar{\psi})\gamma_\nu = 0\\
&\Leftrightarrow -m\bar{\psi} - i(\partial^\mu\bar{\psi})\gamma_\mu = 0,
\end{aligned}$$

vậy

$$m\bar{\psi} + i(\partial^\mu\bar{\psi})\gamma_\mu = 0. \tag{2.3.1.25}$$

Rõ ràng phương trình (2.3.1.20) và (2.3.1.25) không độc lập với nhau. Thật vậy từ (2.3.1.25)

$$m(\psi^\dagger\gamma_0) + i\partial^\mu(\psi^\dagger\gamma_0)\gamma_\mu = 0,$$

lấy liên hợp phức chuyển vị ta có

$$m(\gamma_0^\dagger\psi) - i\gamma_\mu^\dagger\partial^\mu(\gamma_0^\dagger\psi) = 0. \tag{2.3.1.26}$$

Nhân hai vế cho γ_0 ta thu lại được biểu thức (2.3.1.20), bằng cách tương tự ta chuyển từ (2.3.1.20) sang (2.3.1.25).

Ta đi giải nghiệm phương trình (2.3.1.20). Tương tự như trường photon có hai nghiệm $\epsilon^\mu(k,\sigma)e^{-ikx}$ và $\epsilon^{\mu*}(k,\sigma)e^{ikx}$, trường Dirac cũng có hai nghiệm

$$\begin{cases} \psi &= u(k,\sigma)e^{-ikx} \\ \psi' &= v(k,\sigma)e^{ikx} \end{cases}, \tag{2.3.1.27}$$

thay vào (2.3.1.20) và (2.3.1.25) ta có

$$\begin{cases} (-i\gamma^\mu(-ik_\mu) + m)\,u(k,\sigma)e^{-ikx} = 0 \\ (-i\gamma^\mu(ik_\mu) + m)\,v(k,\sigma)e^{ikx} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-\gamma^\mu k_\mu + m)u(k,\sigma) = 0 \\ (\gamma^\mu k_\mu + m)v(k,\sigma) = 0 \end{cases}. \tag{2.3.1.28}$$

Giả thiết hạt chuyển động theo trục Oz lúc đó $k^\mu = (E, 0, 0, k_z)$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-\gamma^0 E + \gamma^3 k_z + m)u(k,\sigma) = 0 \\ (\gamma^0 E - \gamma^3 k_z + m)v(k,\sigma) = 0 \end{cases}.$$

Để đơn giản xét trong hệ quy chiếu hạt đứng yên $k_z = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-\gamma^0 E + m)u(k,\sigma) = 0 \\ (\gamma^0 E + m)v(k,\sigma) = 0 \end{cases}, \tag{2.3.1.29}$$

mà

$$E^2 = k_z^2 + m^2 = m^2 \tag{2.3.1.30}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m(-\gamma^0 + 1)u(k,\sigma) = 0 \\ m(\gamma^0 + 1)v(k,\sigma) = 0 \end{cases}. \tag{2.3.1.31}$$

Xét trong biểu diễn chuẩn $\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & -\mathrm{I} \end{pmatrix}$, đặt

$$u(k,\sigma) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \tag{2.3.1.32}$$

thay vào phương trình đầu tiên suy ra

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\mathrm{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2\mathrm{I}\xi_2 = 0 \Rightarrow \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.3.1.33}$$

Vì ξ_1 bất kì nên ta có thể chọn sao cho đơn giản nhất

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{hoặc} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{2.3.1.34}$$

tương ứng với $\sigma = 1, 2$, suy ra

$$u(k,\sigma) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{hoặc} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{hoặc} \begin{pmatrix} \mathrm{I} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.3.1.35}$$

Tương tự đối với phương trình thứ hai ta suy ra:

$$v(k,\sigma) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{hoặc} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{hoặc} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{I} \end{pmatrix}. \tag{2.3.1.36}$$

Như vậy, đây là các spinor phân cực đặc trưng cho hai trạng thái của hình chiếu toán tử spin lên phương chuyển động, u cho hạt và v cho phản hạt. Tuy nhiên ta phải chuyển về hệ quy chiếu hạt chuyển động và theo phương bất kì bằng phép quay như thực hiện ở trường photon và phép boots. Ta có nghiệm tổng hợp của phương trình

$$\psi = \int \frac{d\overrightarrow{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2E_k}} \sum_{\sigma=1}^{2} \left(u(k,\sigma)a(k,\sigma)e^{-ikx} + v(k,\sigma)b^\dagger(k,\sigma)e^{ikx} \right). \tag{2.3.1.37}$$

Ở đây ta thấy xuất hiện hai hệ số $a(k,\sigma)$ và $b(k,\sigma)$ khác nhau vì ứng với hai trạng thái khác nhau của hạt: hạt và phản hạt. Điều này khác hoàn toàn với trường photon hạt trùng với phản hạt.

2.3.2 Các tính chất của trường Dirac

Sau khi viết được nghiệm của phương trình Dirac ta sẽ đi xây dựng một số tính chất liên quan để áp dụng vào các quá trình tính, tương tự như việc tính tổng véc tơ phân cực của trường photon. Trước tiên ta định nghĩa Wely Spinors

$$\chi_+(p) = \frac{1}{\sqrt{2|\overrightarrow{p}|(|\overrightarrow{p}| + p_z)}} \begin{pmatrix} |\overrightarrow{p}| + p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix}, \tag{2.3.2.1}$$

$$\chi_-(p) = \frac{1}{\sqrt{2|\overrightarrow{p}|(|\overrightarrow{p}| + p_z)}} \begin{pmatrix} -p_x + ip_y \\ |\overrightarrow{p}| + p_z \end{pmatrix}, \tag{2.3.2.2}$$

ta chứng minh

$$\frac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{|\vec{p}|}\chi_\pm(p) = \pm\chi_\pm(p), \tag{2.3.2.3}$$

$$\chi^\dagger_\lambda(p)\chi_{\lambda'}(p) = \delta_{\lambda\lambda'}. \tag{2.3.2.4}$$

Xét

$$\vec{\sigma}.\vec{p} = \sigma^1 p_x + \sigma^2 p_y + \sigma^3 p_z, \tag{2.3.2.5}$$

trong biểu diễn Chiral ta có

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}.\vec{p} &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}p_x + \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}p_y + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}p_z\\ &= \begin{pmatrix}p_z & p_x - ip_y\\ p_x + ip_y & -p_z\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{2.3.2.6}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \vec{\sigma}.\vec{p}\chi_+(p) = \frac{1}{\sqrt{2|\vec{p}|(|\vec{p}|+p_z)}}\begin{pmatrix}p_z & p_x - ip_y\\ p_x + ip_y & -p_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|\vec{p}|+p_z\\ p_x+ip_y\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow \vec{\sigma}.\vec{p}\chi_+(p) = \frac{1}{\sqrt{2|\vec{p}|(|\vec{p}|+p_z)}}\begin{pmatrix}|\vec{p}|+p_z\\ p_x+ip_y\end{pmatrix}|\vec{p}|\\ &\Leftrightarrow \frac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{|\vec{p}|}\chi_+(p) = \chi_+(p).\end{aligned} \tag{2.3.2.7}$$

Chứng minh một cách tương tự ta được $\dfrac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{|\vec{p}|}\chi_-(p) = -\chi_-(p)$.
Từ đó ta được biểu thức (2.3.2.3). Để chứng minh biểu thức (2.3.2.4) ta xét các trường hợp:
Khi $\lambda = \lambda' = 1$

$$\begin{aligned}\chi^\dagger_\lambda(p)\chi_{\lambda'}(p) &= \frac{1}{2|\vec{p}|(|\vec{p}|+p_z)}\left(|\vec{p}|+p_z, p_x - ip_y\right)\begin{pmatrix}|\vec{p}|+p_z\\ p_x+ip_y\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2|\vec{p}|(|\vec{p}|+p_z)}(2|\vec{p}|^2 + 2|\vec{p}|p_z)\\ &= 1\ ;\end{aligned}$$

Khi $\lambda = \lambda' = -1$

$$\begin{aligned}\chi^\dagger_\lambda(p)\chi_{\lambda'}(p) &= \frac{1}{2|\vec{p}|(|\vec{p}|+p_z)}\left(-p_x - ip_y, |\vec{p}|+p_z\right)\begin{pmatrix}-p_x+ip_y\\ |\vec{p}|+p_z\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2|\vec{p}|(|\vec{p}|+p_z)}(2|\vec{p}|^2 + 2|\vec{p}|p_z)\\ &= 1\ ;\end{aligned}$$

Khi $\lambda \neq \lambda'; \lambda = 1, \lambda = -1$

$$\chi^\dagger_\lambda(p)\chi_{\lambda'}(p) = \frac{1}{2|\overrightarrow{p}|(|\overrightarrow{p}| + p_z)}\left(|\overrightarrow{p}| + p_z, p_x - ip_y\right)\begin{pmatrix} -p_x + ip_y \\ |\overrightarrow{p}| + p_z \end{pmatrix} = 0. \quad (2.3.2.8)$$

Tương tự với trường hợp $\lambda = -1;\ \lambda = 1$ ta thu được biểu thức (2.3.2.4).
Tiếp theo ta định nghĩa Dirac Spinors

$$u(p, \lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{p_0 + \lambda|\overrightarrow{p}|}\chi_\lambda(p) \\ \sqrt{p_0 - \lambda|\overrightarrow{p}|}\chi_\lambda(p) \end{pmatrix}, \quad (2.3.2.9)$$

$$v(p, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda\sqrt{p_0 - \lambda|\overrightarrow{p}|}\chi_{-\lambda}(p) \\ -\lambda\sqrt{p_0 + \lambda|\overrightarrow{p}|}\chi_{-\lambda}(p) \end{pmatrix}, \quad (2.3.2.10)$$

với

$$\not{p} = p^\mu\gamma_\mu, \quad (2.3.2.11)$$

xét trong biểu diễn Chiral ta có biểu thức sau

$$\not{p}u(p, \lambda) = mu(p, \lambda), \quad (2.3.2.12)$$
$$\not{p}v(p, \lambda) = -mv(p, \lambda). \quad (2.3.2.13)$$

Thật vậy

$$\not{p} = p^\mu\gamma_\mu = \gamma^0 p_0 + \gamma^i p_i = \begin{pmatrix} 0 & p_0 \\ p_0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i p_i \\ -\sigma^i p_i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p_0 + \sigma^i p_i \\ p_0 - \sigma^i p_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3.2.14)$$

suy ra

$$\begin{aligned} \not{p}u(p, \lambda) &= \begin{pmatrix} 0 & p_0 + \sigma^i p_i \\ p_0 - \sigma^i p_i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{p_0 + \lambda|\overrightarrow{p}|} \\ \sqrt{p_0 - \lambda|\overrightarrow{p}|} \end{pmatrix}\chi_\lambda(p) \\ &= \begin{pmatrix} (p_0 + \sigma^i p_i)\sqrt{p_0 - \lambda|\overrightarrow{p}|} \\ (p_0 - \sigma^i p_i)\sqrt{p_0 + \lambda|\overrightarrow{p}|} \end{pmatrix}\chi_\lambda(p) \\ &= \begin{pmatrix} (p_0 - \overrightarrow{\sigma}\overrightarrow{p})\sqrt{p_0 - \lambda|\overrightarrow{p}|} \\ (p_0 + \overrightarrow{\sigma}\overrightarrow{p})\sqrt{p_0 + \lambda|\overrightarrow{p}|} \end{pmatrix}\chi_\lambda(p). \end{aligned} \quad (2.3.2.15)$$

Theo (2.3.2.3) ta được

$$\begin{aligned} \not{p}u(p, \lambda) &= \begin{pmatrix} (p_0 + \lambda|\overrightarrow{p}|)\sqrt{p_0 - \lambda|\overrightarrow{p}|} \\ (p_0 - \lambda|\overrightarrow{p}|)\sqrt{p_0 + \lambda|\overrightarrow{p}|} \end{pmatrix}\chi_\lambda(p) \quad (2.3.2.16) \\ &= m\begin{pmatrix} \sqrt{p_0 + \lambda|\overrightarrow{p}|} \\ \sqrt{p_0 - \lambda|\overrightarrow{p}|} \end{pmatrix}\chi_\lambda(p) \\ &= mu(p, \lambda), \end{aligned}$$

ở đây ta có biến đổi trên vì

$$\sqrt{p_0 + \lambda|\overrightarrow{p}|}\sqrt{p_0 - \lambda|\overrightarrow{p}|} = \sqrt{p_0^2 - |\overrightarrow{p}|^2} = m. \tag{2.3.2.17}$$

Chứng minh tương tự đối với (2.3.2.13). Một lần nữa ta sẽ thực hiện việc tính toán để tính tích các biểu thức:

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p,\lambda)u(p,\lambda') &= u^\dagger(p,\lambda)\gamma^0 u(p,\lambda') \\
&= \chi_\lambda^\dagger(p)\left(\sqrt{p_0 + \lambda|\overrightarrow{p}|}, \sqrt{p_0 - \lambda|\overrightarrow{p}|}\right)\begin{pmatrix}\sqrt{p_0 - \lambda'|\overrightarrow{p}|}\\ \sqrt{p_0 + \lambda'|\overrightarrow{p}|}\end{pmatrix}\chi_{\lambda'}(p) \\
&= \chi_\lambda^\dagger(p)\chi_{\lambda'}(p)\left(\sqrt{p_0 + \lambda|\overrightarrow{p}|}, \sqrt{p_0 - \lambda|\overrightarrow{p}|}\right)\begin{pmatrix}\sqrt{p_0 - \lambda'|\overrightarrow{p}|}\\ \sqrt{p_0 + \lambda'|\overrightarrow{p}|}\end{pmatrix} \\
&= \delta_{\lambda\lambda'}\left(\sqrt{p_0 + \lambda|\overrightarrow{p}|}, \sqrt{p_0 - \lambda|\overrightarrow{p}|}\right)\begin{pmatrix}\sqrt{p_0 - \lambda'|\overrightarrow{p}|}\\ \sqrt{p_0 + \lambda'|\overrightarrow{p}|}\end{pmatrix} \\
&= 2m\delta_{\lambda\lambda'}\ ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p,\lambda)v(p,\lambda') &= u^\dagger(p,\lambda)\gamma^0 v(p,\lambda') \\
&= \chi_\lambda^\dagger\left(\sqrt{p_0 + \lambda|\overrightarrow{p}|}, \sqrt{p_0 - \lambda|\overrightarrow{p}|}\right)\begin{pmatrix}-\sqrt{p_0 + \lambda'|\overrightarrow{p}|}\\ \sqrt{p_0 - \lambda'|\overrightarrow{p}|}\end{pmatrix}\chi_{-\lambda'} \\
&= \chi_\lambda^\dagger\chi_{-\lambda'}\left(\sqrt{p_0 + \lambda|\overrightarrow{p}|}, \sqrt{p_0 - \lambda|\overrightarrow{p}|}\right)\begin{pmatrix}-\sqrt{p_0 + \lambda'|\overrightarrow{p}|}\\ \sqrt{p_0 - \lambda'|\overrightarrow{p}|}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Khi $\lambda = \lambda' \Rightarrow \chi_\lambda^\dagger\chi_{-\lambda'} = 0 \Rightarrow \bar{u}(p,\lambda)v(p,\lambda') = 0$.
Khi $\lambda \neq \lambda' \Rightarrow \chi_\lambda^\dagger\chi_{-\lambda'} = 1$ và $\lambda = -\lambda'$

$$\Rightarrow \bar{u}(p,\lambda)v(p,\lambda') = \left(\sqrt{p_0 + \lambda|\overrightarrow{p}|}, \sqrt{p_0 - \lambda|\overrightarrow{p}|}\right)\begin{pmatrix}-\sqrt{p_0 - \lambda|\overrightarrow{p}|}\\ \sqrt{p_0 + \lambda|\overrightarrow{p}|}\end{pmatrix} = 0,$$

từ đó

$$\bar{u}(p,\lambda)v(p,\lambda') = 0.$$

Và nếu chứng minh như trên ta sẽ được các biểu thức sau:

$$\bar{u}(p,\lambda)u(p,\lambda') = 2m\delta_{\lambda\lambda'}, \tag{2.3.2.18}$$

$$\bar{v}(p,\lambda)v(p,\lambda') = -2m\delta_{\lambda\lambda'}, \tag{2.3.2.19}$$

$$\bar{u}(p,\lambda)v(p,\lambda') = 0, \tag{2.3.2.20}$$

$$\bar{v}(p,\lambda)u(p,\lambda') = 0. \tag{2.3.2.21}$$

Bây giờ ta sẽ đi tính tổng các ma trận tương tự như tổng các véc tơ phân cực ở trường photon. Ta xét

$$\sum_{s=1}^{2} u(p,s)\bar{u}(p,s) = u(p,1)\bar{u}(p,1) + u(p,2)\bar{u}(p,2), \tag{2.3.2.22}$$

ở đây ta có thể đồng nhất $s = 1, 2$ tương ứng với $\lambda = \pm 1$. Mà

$$\begin{aligned}
u(p,1)\bar{u}(p,1) &= u(p,1)u^\dagger(p,1)\gamma^0 && (2.3.2.23)\\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{p_0+\lambda|\overrightarrow{p}|}\chi_1 \\ \sqrt{p_0-\lambda|\overrightarrow{p}|}\chi_1 \end{pmatrix} \left(\sqrt{p_0+\lambda|\overrightarrow{p}|}\chi_1^\dagger, \sqrt{p_0-\lambda|\overrightarrow{p}|}\chi_1^\dagger\right)\gamma_0 \\
&= \begin{pmatrix} (p_0+\lambda|\overrightarrow{p}|)\chi_1\chi_1^\dagger & m\chi_1\chi_1^\dagger \\ m\chi_1\chi_1^\dagger & (p_0-\lambda|\overrightarrow{p}|)\chi_1\chi_1^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} m\chi_1\chi_1^\dagger & (p_0+\lambda|\overrightarrow{p}|)\chi_1\chi_1^\dagger \\ (p_0-\lambda|\overrightarrow{p}|)\chi_1\chi_1^\dagger & m\chi_1\chi_1^\dagger \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} m\chi_1\chi_1^\dagger & (p_0+|\overrightarrow{p}|)\chi_1\chi_1^\dagger \\ (p_0-|\overrightarrow{p}|)\chi_1\chi_1^\dagger & m\chi_1\chi_1^\dagger \end{pmatrix}, && (2.3.2.24)\\
u(p,2)\bar{u}(p,2) &= u(p,2)u^\dagger(p,2)\gamma^0 \\
&= \begin{pmatrix} m\chi_2\chi_2^\dagger & (p_0+\lambda|\overrightarrow{p}|)\chi_2\chi_2^\dagger \\ (p_0-\lambda|\overrightarrow{p}|)\chi_2\chi_2^\dagger & m\chi_2\chi_2^\dagger \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} m\chi_2\chi_2^\dagger & (p_0-|\overrightarrow{p}|)\chi_2\chi_2^\dagger \\ (p_0+|\overrightarrow{p}|)\chi_2\chi_2^\dagger & m\chi_2\chi_2^\dagger \end{pmatrix}. && (2.3.2.25)
\end{aligned}$$

Mặc khác

$$\begin{aligned}
\chi_1\chi_1^\dagger &= \frac{1}{2|\overrightarrow{p}|(|\overrightarrow{p}+p_z|)} \begin{pmatrix} |\overrightarrow{p}|+p_z \\ p_x+ip_y \end{pmatrix} (|\overrightarrow{p}|+p_z, p_x-ip_y) \\
&= \frac{1}{2|\overrightarrow{p}|} \begin{pmatrix} |\overrightarrow{p}|+p_z & p_x-ip_y \\ p_x+ip_y & |\overrightarrow{p}|-p_z \end{pmatrix}, && (2.3.2.26)\\
\chi_2\chi_2^\dagger &= \frac{1}{2|\overrightarrow{p}|(|\overrightarrow{p}+p_z|)} \begin{pmatrix} -p_x+ip_y \\ |\overrightarrow{p}|+p_z \end{pmatrix} (-p_x-ip_y, |\overrightarrow{p}|+p_z) \\
&= \frac{1}{2|\overrightarrow{p}|} \begin{pmatrix} |\overrightarrow{p}|-p_z & -p_x+ip_y \\ -p_x-ip_y & |\overrightarrow{p}|+p_z \end{pmatrix}, && (2.3.2.27)\\
\Rightarrow \chi_1\chi_1^\dagger + \chi_2\chi_2^\dagger &= \frac{1}{2|\overrightarrow{p}|} \begin{pmatrix} 2|\overrightarrow{p}| & 0 \\ 0 & 2|\overrightarrow{p}| \end{pmatrix} = \mathrm{I}, && (2.3.2.28)\\
\chi_1\chi_1^\dagger - \chi_2\chi_2^\dagger &= \frac{1}{|\overrightarrow{p}|} \begin{pmatrix} p_z & p_x-ip_y \\ p_x+ip_y & -p_z \end{pmatrix}, && (2.3.2.29)
\end{aligned}$$

suy ra

$$\sum_{s=1}^{2} u(p,s)\bar{u}(p,s) = m\mathrm{I} + p^0\gamma_0 + p^i\gamma_i = \not{p} + m. \qquad (2.3.2.30)$$

Hoàn toàn tương tự ta được biểu thức tính tổng thứ hai

$$\sum_{s=1}^{2} v(p,s)\bar{v}(p,s) = -m\mathrm{I} + p^0\gamma_0 + p^i\gamma_i = \not{p} - m. \qquad (2.3.2.31)$$

2.3.3 Lượng tử hóa trường Dirac

Trước khi lượng tử hóa trường ta sẽ đi tính đại lượng xung lượng chính tắc

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \psi)} = i\bar{\psi}\gamma^0 = i\psi^\dagger\gamma^0\gamma^0 = i\psi^\dagger. \tag{2.3.3.1}$$

Ta giả sử trường Dirac cũng tuân theo các quy luật giao hoán tử giống trường photon và sau đây ta sẽ đi chứng minh điều này là không phù hợp. Tương tự như trường photon ta có các biểu thức sau:

$$\left[\psi^\alpha(\overrightarrow{x}, t), \psi^\beta(\overrightarrow{y}, t)\right] = 0, \tag{2.3.3.2}$$

$$\left[\psi^{\dagger\alpha}(\overrightarrow{x}, t), \psi^{\dagger\beta}(\overrightarrow{y}, t)\right] = 0, \tag{2.3.3.3}$$

$$\left[\psi^\alpha(\overrightarrow{x}, t), \pi^\beta(\overrightarrow{y}, t)\right] = i\delta(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y})\delta^{\alpha\beta} \tag{2.3.3.4}$$

$$\Rightarrow \left[\psi^\alpha(\overrightarrow{x}, t), \psi^{\dagger\beta}(\overrightarrow{y}, t)\right] = \delta(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y})\delta^{\alpha\beta}. \tag{2.3.3.5}$$

Ta sẽ đi lượng tử hóa trường Dirac như sau:

$$\psi^\alpha(\overrightarrow{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2E_k}} \sum_{\sigma=1}^{2} \left(u^\alpha(k,\sigma)a(k,\sigma)e^{-ikx} + v^\alpha(k,\sigma)b^\dagger(k,\sigma)e^{ikx}\right), \tag{2.3.3.6}$$

$$\psi^{\dagger\beta}(\overrightarrow{y}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2E_p}} \sum_{\sigma'=1}^{2} \left(a^\dagger(p,\sigma')u^{\dagger\beta}(p,\sigma')e^{ipy} + b(p,\sigma')v^{\dagger\beta}(p,\sigma')e^{-ipy}\right), \tag{2.3.3.7}$$

suy ra

$$\begin{aligned}&\left[\psi^\alpha(\overrightarrow{x}, t), \psi^{\dagger\beta}(\overrightarrow{y}, t)\right]\\ &= \int\int \frac{d^3k d^3p}{2(2\pi)^3\sqrt{E_k E_p}} \sum_{\sigma=1}^{2}\sum_{\sigma'=1}^{2} \Big(u^\alpha(k,\sigma)[a(k,\sigma), a^\dagger(p,\sigma')]u^{\dagger\beta}(p,\sigma')e^{-i(kx-py)}\\ &\qquad + v^\alpha(k,\sigma)[b^\dagger(k,\sigma), b(p,\sigma')]v^{\dagger\beta}(p,\sigma')e^{i(kx-py)}\Big).\end{aligned} \tag{2.3.3.8}$$

Tương tự như trường photon ta có

$$[a(k,\sigma), a^\dagger(p,\sigma')] = f\delta(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{k})\delta^{\sigma\sigma'}, \tag{2.3.3.9}$$

$$[b(k,\sigma), b^\dagger(p,\sigma')] = -f\delta(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{k})\delta^{\sigma\sigma'}, \tag{2.3.3.10}$$

lúc này các hàm a, b trở thành các toán tử, nên

$$\left[\psi^\alpha(\overrightarrow{x}, t), \psi^{\dagger\beta}(\overrightarrow{y}, t)\right]$$

$$= f\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k}\sum_{\sigma=1,2}\left(u^{\alpha}(k,\sigma)u^{\dagger\beta}(k,\sigma)e^{-ik(x-y)} + v^{\alpha}(k,\sigma)v^{\dagger\beta}(k,\sigma)e^{ik(x-y)}\right)$$
$$= f\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k}\sum_{\sigma=1,2}\left(u(k,\sigma)\bar{u}(k,\sigma)e^{-ik(x-y)} + v(k,\sigma)\bar{v}(k,\sigma)e^{ik(x-y)}\right)(\gamma^0\delta^{\alpha\beta})$$
$$= f\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k}\left((\not{p}+m)e^{-i\overrightarrow{k}(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y})} + (\not{p}-m)e^{i\overrightarrow{k}(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y})}\right)(\gamma^0\delta^{\alpha\beta}). \quad (2.3.3.11)$$

Thực hiện đổi biến $\overrightarrow{k} = -\overrightarrow{k'}$ ở số hạng thứ hai trong biểu thức

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} d\overrightarrow{k}(\not{p}-m)e^{i\overrightarrow{k}(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y})} = -\int_{\infty}^{-\infty} d\overrightarrow{k'}(p^0\gamma_0 - p^i\gamma_i - m)e^{-i\overrightarrow{k'}(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y})}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\overrightarrow{k}(p^0\gamma_0 - p^i\gamma_i - m)e^{-i\overrightarrow{k}(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y})}, \quad (2.3.3.12)$$

thay vào (2.3.3.11) ta được

$$\left[\psi^{\alpha}(\overrightarrow{x},t), \psi^{\dagger\beta}(\overrightarrow{y},t)\right] = f\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k}(2p^0\gamma_0)\gamma^0\delta^{\alpha\beta}e^{-i\overrightarrow{k}(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y})} = f\delta^{\alpha\beta}\delta(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}). \quad (2.3.3.13)$$

So sánh với (2.3.3.5) suy ra $f = 1$. Vậy ta được hai kết quả sau:

$$[a(k,\sigma), a^{\dagger}(k,\sigma'] = \delta(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{k})\delta^{\sigma\sigma'}, \quad (2.3.3.14)$$
$$[b(k,\sigma), b^{\dagger}(k,\sigma'] = -\delta(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{k})\delta^{\sigma\sigma'}. \quad (2.3.3.15)$$

Ta sẽ chứng minh hai biểu thức trên là không phù hợp bằng cách đi tính năng lượng của trường qua biểu thức

$$H = \int (i\psi^{\dagger}\partial_0\psi - i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi + m\bar{\psi}\psi)dx^3$$
$$= \int (-i\bar{\psi}\gamma^i\partial_i\psi + m\bar{\psi}\psi)dx^3. \quad (2.3.3.16)$$

Từ (2.3.1.37) suy ra

$$i\partial_i\psi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2E_k}}\sum_{\sigma=1}^{2}\left(u(k,\sigma)a(k,\sigma)e^{-ikx} - v(k,\sigma)b^{\dagger}(k,\sigma)e^{ikx}\right)(k_i), \quad (2.3.3.17)$$
$$\bar{\psi} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2E_p}}\sum_{\sigma'=1}^{2}\left(a^{\dagger}(p,\sigma')\bar{u}(p,\sigma')e^{ipx} + b(p,\sigma')\bar{v}(p,\sigma')e^{-ipx}\right), \quad (2.3.3.18)$$

sử dụng tính chất hàm Delta -Dirac lúc đó ta có:

$$H = \int \frac{d^3k}{2E_k}\sum_{\sigma=1}^{2}\sum_{\sigma'=1}^{2}\left[\left(-a^{\dagger}(k,\sigma')\bar{u}(k,\sigma')\gamma^i u(k,\sigma)a(k,\sigma)\right.\right.$$

$$+b(k,\sigma')\bar{v}(k,\sigma')\gamma^i v(k,\sigma)b^\dagger(k,\sigma)\big)(k_i) + m\bar{\psi}\psi\big]$$

$$= \int \frac{d^3k}{2E_k}\sum_{\sigma=1}^{2}\sum_{\sigma'=1}^{2}\big[\big(-a^\dagger(k,\sigma')\bar{u}(k,\sigma')(\not{k} - k_0\gamma^0)u(k,\sigma)a(k,\sigma)$$

$$+b(k,\sigma')\bar{v}(k,\sigma')(\not{k} - k_0\gamma^0)v(k,\sigma)b^\dagger(k,\sigma)\big) + m\bar{\psi}\psi\big]. \quad (2.3.3.19)$$

Sử dụng biểu thức (2.3.2.12) và (2.3.2.13) ta suy ra:

$$H = \int \frac{d^3k}{2E_k}\sum_{\sigma,\sigma'=1}^{2}\big(a^\dagger(k,\sigma')u^\dagger(k,\sigma')u(k,\sigma)a(k,\sigma) - b(k,\sigma')v^\dagger(k,\sigma')v(k,\sigma)b^\dagger(k,\sigma)\big)(k_0). \quad (2.3.3.20)$$

Xét

$$u^\dagger(k,\sigma')u(k,\sigma) = \chi_\lambda^\dagger\chi_{\lambda'}\left(\sqrt{p_0+\lambda|\overrightarrow{p}|}, \sqrt{p_0-\lambda|\overrightarrow{p}|}\right)\begin{pmatrix}\sqrt{p_0+\lambda'|\overrightarrow{p}|}\\ \sqrt{p_0-\lambda'|\overrightarrow{p}|}\end{pmatrix} = 2p_0\delta_{\lambda\lambda'}, \quad (2.3.3.21)$$

ta nhận được kết quả tương tự

$$v^\dagger(k,\sigma')v(k,\sigma) = 2p_0\delta_{\lambda\lambda'}. \quad (2.3.3.22)$$

Suy ra

$$\begin{aligned} H &= \int d^3kE\left(a^\dagger(k,\sigma)a(k,\sigma) - [b(k,\sigma), b^\dagger(k,\sigma)] - b^\dagger(k,\sigma)b(k,\sigma)\right) \\ &= \int d^3kE(a^\dagger(k,\sigma)a(k,\sigma) - b^\dagger(k,\sigma)b(k,\sigma)) + \int d^3kE\delta(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{k}) \\ &= E + \int d^3kE(a^\dagger(k,\sigma)a(k,\sigma) - b^\dagger(k,\sigma)b(k,\sigma)), \end{aligned} \quad (2.3.3.23)$$

$a^\dagger a$ là toán tử số hạt, $b^\dagger b$ là toán tử phản số hạt. Từ biểu thức này chứng tỏ $b^\dagger(k,\sigma)b(k,\sigma)$ mang dấu âm, nghĩa là phản hạt mang năng lượng âm. Tuy nhiên trong thực tế tất cả các hạt đều mang năng lượng dương chứng tỏ lý thuyết của chúng ta chưa phù hợp. Để thay đổi ta sẽ đổi giao hoán tử thành phản giao hoán

$$[A,B] \to \{A,B\} \quad (2.3.3.24)$$

với

$$\{A,B\} = AB + BA = \{B,A\}. \quad (2.3.3.25)$$

Một cách hoàn toàn tương tự ta được biểu thức lượng tử hóa trường Dirac

$$\{b(k,\sigma), b^\dagger(k,\sigma)\} = \{a(k,\sigma), a^\dagger(k,\sigma)\} = \delta(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{k})\delta^{\sigma\sigma'}, \quad (2.3.3.26)$$

thay vào tính

$$H = -E + \int d^3kE(a^\dagger(k,\sigma)a(k,\sigma) + b^\dagger(k,\sigma)b(k,\sigma)). \quad (2.3.3.27)$$

Ta thấy lúc này lý thuyết đã phù hợp.

2.3.4 Hàm truyền của trường Dirac

Giai đoạn cuối cùng trong nghiên cứu trường Dirac chính là tính hàm truyền của trường. Các toán tử đều có tính chất tương tự như trường photon. Từ (2.2.4.4) và (2.2.4.5) ta có

$$\left\langle 0\middle|\psi^\alpha(x)\middle|k,\sigma\right\rangle = u^\alpha(k,\sigma)e^{-ikx}, \tag{2.3.4.1}$$

$$\left\langle k,\sigma\middle|\psi^\alpha(x)\middle|0\right\rangle = \bar{u}^\alpha(k,\sigma)e^{ikx}. \tag{2.3.4.2}$$

Vì trường Dirac có sự phân biệt giữa hạt và phản hạt nên lúc này

$$\pi^{\alpha\beta} = \left\langle 0\middle|\top\big(\psi^\alpha(x),\bar{\psi}^\beta(y)\big)\middle|0\right\rangle = \left\langle 0\middle|\theta(x_0-y_0)\psi^\alpha(x)\bar{\psi}^\beta(y) - \theta(y_0-x_0)\bar{\psi}^\beta(y)\psi^\alpha(x)\middle|0\right\rangle. \tag{2.3.4.3}$$

Từ phương trình chuyển động (2.3.1.20) ta có

$$\begin{aligned}(-i\gamma^\mu\partial_\mu+m)^{\rho\alpha}\pi^{\alpha\beta} = (-i\gamma^\mu\partial_\mu+m)^{\rho\alpha}\big\langle 0\big|\,\Big(&\theta(x_0-y_0)\psi^\alpha(x)\bar{\psi}^\beta(y)\\ &-\theta(y_0-x_0)\bar{\psi}^\beta(y)\psi^\alpha(x)\Big)\,\big|0\big\rangle.\end{aligned} \tag{2.3.4.4}$$

Để đơn giản xét $x_0>y_0$ khi đó

$$(-i\gamma^\mu\partial_\mu+m)^{\rho\alpha}\pi^{\alpha\beta} = -i\gamma^{0\rho\alpha}(\partial_0\theta(x_0-y_0))\psi^\alpha(x)\bar{\psi}^\beta(y) - \theta(x_0-y_0)i\gamma^\mu\partial_\mu\psi^\alpha(x)\bar{\psi}^\beta(y) + m\pi^{\alpha\beta}. \tag{2.3.4.5}$$

Mặc khác

$$b(k,\sigma)\big|0\big\rangle = 0, \tag{2.3.4.6}$$

$$\left\langle 0\middle|a(k,\sigma)a^\dagger(k,\sigma)\middle|0\right\rangle = \left\langle 0\middle|\{a(k,\sigma),a^\dagger(k,\sigma')\}\middle|0\right\rangle = \delta(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{k})\delta^{\sigma\sigma'}. \tag{2.3.4.7}$$

Ta suy ra

$$\left\langle 0\middle|\partial_\mu\psi^\alpha(x)\bar{\psi}^\beta(y)\middle|0\right\rangle = \Big\langle 0\Big|\int\frac{d^3k}{2E_k(2\pi)^3}(-ik_\mu)\sum_{\sigma=1}^{2}u^\alpha(k,\sigma)\bar{u}^\beta(k,\sigma)e^{-ik(x-y)}\Big|0\Big\rangle \tag{2.3.4.8}$$

$$\Rightarrow \left\langle 0\middle|i\gamma^\mu\partial_\mu\psi^\alpha(x)\bar{\psi}^\beta(y)\middle|0\right\rangle = \Big\langle 0\Big|\int\frac{d^3k}{2E_k(2\pi)^3}\sum_{\sigma=1}^{2}\not{p}u^\alpha(k,\sigma)\bar{u}^\beta(k,\sigma)e^{-ik(x-y)}\Big|0\Big\rangle \tag{2.3.4.9}$$

$$\Rightarrow \left\langle 0\middle|\theta(x_0-y_0)i\gamma^\mu\partial_\mu\psi^\alpha(x)\bar{\psi}^\beta(y)\middle|0\right\rangle = m\pi^{\alpha\beta}. \tag{2.3.4.10}$$

Thay vào (2.3.4.5) ta được

$$(-i\gamma^\mu\partial_\mu+m)^{\rho\alpha}\pi^{\alpha\beta} = -i\gamma^{0\rho\alpha}(\partial_0\theta(x_0-y_0))\psi^\alpha(x)\bar{\psi}^\beta(y). \tag{2.3.4.11}$$

Tương tự với trường hợp $y_0>x_0$ ta suy ra

$$(-i\gamma^\mu\partial_\mu+m)^{\rho\alpha}\pi^{\alpha\beta} = -i\delta(x_0-y_0)\gamma^{0\rho\alpha}\gamma^{0\beta\sigma}\left\{\psi^\alpha(x),\psi^{\dagger\sigma}(y)\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= -i\delta(x_0 - y_0)\gamma^{0\rho\alpha}\gamma^{0\beta\sigma}\delta(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y})\delta^{\alpha\sigma} \\
&= -i\delta(x_0 - y_0)\gamma^{0\rho\alpha}\gamma^{0\beta\alpha}\delta(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}) \\
&= -i\delta(x_0 - y_0)(\gamma^0\gamma^0)^{\rho\beta}\delta(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}) \\
&= -i\delta(x - y)\delta^{\rho\beta}. \qquad (2.3.4.12)
\end{aligned}
$$

Chuyển qua không gian xung lượng ta có

$$\int \frac{dp^4}{(2\pi)^4}(-\gamma^\mu p_\mu + m)^{\rho\alpha}\pi^{\alpha\beta}(p)e^{-ip(x-y)} = -i\int \frac{dp^4}{(2\pi)^4}\delta^{\rho\beta}e^{-ip(x-y)} \qquad (2.3.4.13)$$

$$\Rightarrow \pi^{\alpha\beta}(p) = \frac{-i\delta^{\rho\beta}}{(m - \not{p})^{\rho\alpha}} = \frac{i(\not{p} + m)^{\rho\alpha}\delta^{\rho\beta}}{p^2 - m^2}, \qquad (2.3.4.14)$$

vậy

$$\pi^{\alpha\beta}(p) = \frac{i(\not{p} + m)^{\rho\alpha}\delta^{\rho\beta}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \qquad (2.3.4.15)$$

Như vậy ta đã nghiên cứu xong về trường Dirac tự do với cách nghiên cứu tương tự như trường photon.

Tóm tắt

1/Hàm Lagrangian của trường Dirac có dạng

$$L = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu\psi) - m\bar{\psi}\psi.$$

2/ Phương trình Dirac

$$-i\gamma^\mu\partial_\mu\psi + m\psi = 0,$$

hoặc

$$m\bar{\psi} + i(\partial^\mu\bar{\psi})\gamma_\mu = 0.$$

3/ Nghiệm của phương trình Dirac có dạng

$$\psi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2E_k}}\sum_{\sigma=1}^{2}\left(u(k,\sigma)a(k,\sigma)e^{-ikx} + v(k,\sigma)b^\dagger(k,\sigma)e^{ikx}\right).$$

4/ Dirac spinor phân cực thỏa mãn phương trình sau

Tính chất 1

$$
\begin{aligned}
\not{p}u(p,\lambda) &= mu(p,\lambda), \\
\not{p}v(p,\lambda) &= -mv(p,\lambda).
\end{aligned}
$$

Tính chất 2

$$\sum_{s=1}^{2} u(p,s)\bar{u}(p,s) = \not{p} + m,$$

$$\sum_{s=1}^{2} v(p,s)\bar{v}(p,s) = \not{p} - m.$$

5/ Các toán tử sinh hủy hạt và phản hạt thỏa mãn hệ thức phản giao hoán sau

$$\{a(k,\sigma), a^\dagger(k,\sigma)\} = \{b(k,\sigma), b^\dagger(k,\sigma)\} = \delta(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{k})\delta^{\sigma\sigma'}.$$

6/ Hàm truyền của trường Dirac xét trong không gian xung lượng

$$\pi^{\alpha\beta}(p) = \frac{i(\not{p} + m)^{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}.$$

2.4 Lý thuyết tương tác

2.4.1 Lagrangian tương tác

Quay trở lại bài toán tán xạ Compton của ta xét ở trường hợp đơn giản: photon tự do va chạm với hạt electron ở trạng thái tự do và sinh ra hai hạt mới ở trạng thái mới. Ta đã biết được đặc điểm, tính chất và phương trình chuyển động của trường photon và electron tự do, ở đây điều chúng ta còn thiếu chính là đi xét sự tương tác của hai trường, vì nhờ có tương tác quá trình tán xạ mới thực sự được xảy ra. Các trường tương tác với nhau, làm biến đổi nhau và sinh ra các hạt mới. Để xét trường tổng hợp của photon và electron, ta xuất phát từ Lagrangian tổng hợp

$$\begin{aligned} L &= L_{photon} + L_{eletron} \\ &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi. \end{aligned} \tag{2.4.1.1}$$

Dưới phép biến đổi $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu\varphi(x)$, hàm Lagrangian của photon bất biến. Đối với hàm Lagrangian của electron khi thực hiện biến đổi gauge

$$\psi(x) \to e^{iq\varphi(x)}\psi(x), \tag{2.4.1.2}$$

với $\varphi(x) =$ hằng số ta thấy Lagrangian bất biến, tuy nhiên khi $\varphi(x)$ thay đổi thì

$$\begin{aligned} L_{electron} &= ie^{-iq\varphi(x)}\bar{\psi}\gamma^\mu e^{iq\varphi(x)}\partial_\mu\psi + i^2qe^{-iq\varphi(x)}\bar{\psi}\gamma^\mu e^{iq\varphi(x)}\psi\partial_\mu\varphi(x) - m\bar{\psi}e^{-iq\varphi(x)}\psi e^{iq\varphi(x)} \\ &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\varphi(x). \end{aligned} \tag{2.4.1.3}$$

Rõ ràng lúc này Lagrangian dư ra một số hạng và không còn bất biến nữa. Vậy ta phải điều chỉnh lại Lagrangian bằng cách cho thêm một số hạng đặc trưng cho sự tương tác của hai trường

$$L_{electron} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi. \tag{2.4.1.4}$$

với

$$D_\mu = \partial_\mu + f A_\mu, \tag{2.4.1.5}$$

D_μ được gọi là đạo hàm hiệp biến.

Thực hiện phép đổi biến $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \varphi(x)$ và $\psi(x) \to e^{iq\varphi(x)}\psi(x)$ với trường tổng hợp, ta thấy Lagrangian dư ra một lượng

$$\Delta L = if\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \varphi(x)\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \varphi(x)\psi. \tag{2.4.1.6}$$

Để L bất biến thì $\Delta L = 0$ suy ra

$$f = -iq \Rightarrow D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu. \tag{2.4.1.7}$$

Ta thu được hàm Lagrangian

$$L = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi, \tag{2.4.1.8}$$

lúc đó L bất biến gauge. Đặt $L_I = q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi$, số hạng L_I là số hạng đặc trưng cho sự tương tác giữa photon và electron. Tham số q là điện tích của hạt electron.

Nếu ngay từ ban đầu ta áp đặt QED Lagrangian phải bất biến đối với phép biến đổi gauge, thì số hạng $m^2 A^\mu A_\mu$ không thể xuất hiên trong Lagrangian. Hay nói khác đi bất biến gauge tiên đoán photon không có khối lượng.

2.4.2 Tiết diện tán xạ

Trong cơ học cổ điển khi một hạt chuyển động tới gặp một hạt, hoặc xảy ra va chạm, hoặc là không. Các sự kiện này đều mang tính chắc chắn và có thể dự đoán được. Ta tưởng tượng bài toán bắn vào một hạt bia A đang ở trạng thái nghỉ một chùm hạt B có vận tốc v, mật độ hạt là ρ trong khoảng thời gian T. Ta có thể tính toán phần trăm số hạt tán xạ bằng một đại lượng gọi là tiết diện tán xạ được tính như sau

$$\sigma = \frac{1}{Tv\rho}\mathrm{N}, \tag{2.4.2.1}$$

với N là số hạt tán xạ. Tiết diện tán xạ có đơn vị diện tích, là diện tích mặt cắt ngang nơi xảy ra sự tán xạ và sinh ra hạt mới. Đây là đại lượng đo dược trong thực nghiệm và là công cụ để kiểm tra tính đúng đắn của lý thuyết.

Tuy nhiên có sự khác biệt trong cơ học lượng tử, các sự kiện diễn ra đều mang tính ngẫu nhiên và ta chỉ biết được xác suất diễn ra va chạm là bao nhiêu. Ta định nghĩa vi phân tiết diện tán xạ trong cơ học lượng tử

$$d\sigma = \frac{1}{Tv\rho}d\mathrm{P}, \tag{2.4.2.2}$$

trong đó dP là vi phân xác suất.

Đại lượng này có ý nghĩa là thước đo cường độ tán xạ hay xác suất để xảy ra tán xạ. Trong NU biểu thức tính σ sẽ cho đơn vị là $\frac{1}{\mathrm{eV}^2}$. Ta có thể đổi từ hệ NU sang SI dựa vào biểu thức (1.2.1.9) $\frac{1}{\mathrm{eV}^2} = 3,88.10^{-14}\mathrm{m}^2$. Trong thực nghiệm người ta dùng barn là đơn vị cho σ, kí hiệu b, 1b= $10^{-28}m^2$. Suy ra $\frac{1}{\mathrm{eV}^2} = 3,88.10^{14}\mathrm{b}$.

Để đơn giản ta xét bài toán có hai hạt va chạm với nhau và sinh ra n hạt mới

$$p_1 + p_2 \to \{p_i\}, \tag{2.4.2.3}$$

lúc đó $\rho = \frac{1}{V}$ với V là thể tích vùng không gian tán xạ. Vận tốc xét trong hệ quy chiếu bất kì nên sẽ bằng vận tốc tương đối của hai hạt đầu $\vec{v} = |\vec{v_1} - \vec{v_2}|$. Khi đó phương trình (2.4.2.2) trở thành

$$d\sigma = \frac{V}{T|\vec{v_1} - \vec{v_2}|}d\mathrm{P}. \tag{2.4.2.4}$$

Như ta đã biết trong cơ học lượng tử vi phân xác suất được tính bằng bình phương biên độ. Và xét trong lý thuyết trường biên độ tán xạ có biểu thức

$$\big\langle f\big|S\big|i\big\rangle, \tag{2.4.2.5}$$

trong đó $\big|i\big\rangle$ là trạng thái của các hạt đầu, $\big|f\big\rangle$ là trạng thái cuối của các hạt mới sinh ra, S là ma trận chuyển các hạt từ trạng thái đầu sang trạng thái cuối, cho ta biết tất cả thông tin về quá trình tán xạ, đặc trưng cho sự tương tác giữa các trường của các hạt. Lúc đó vi phân xác suất chuẩn hóa là

$$d\mathrm{P} = \frac{|\langle f|S|i\rangle|^2}{\langle f|f\rangle\langle i|i\rangle}d\Pi, \tag{2.4.2.6}$$

trong đó vi phân thể tích trong không gian xung lượng được định nghĩa như sau

$$d\Pi = \prod_{j=1}^{n} \frac{V}{(2\pi)^3}d^3p_j. \tag{2.4.2.7}$$

Nếu xét tất cả các biến cố trong toàn không gian xung lượng thì lúc đó xác suất xảy ra tuyệt đối $\int d\Pi = 1$.

Nhắc lại trong trường điện từ tự do ta có biểu thức

$$Aa^\dagger(k,\sigma)|0\rangle = |k,\sigma\rangle \quad ; \quad \langle 0|Aa(k,\sigma) = \langle k,\sigma|,$$

suy ra

$$\langle k|k\rangle = A^2\langle 0|a(k,\sigma)a^\dagger(k,\sigma)|0\rangle = \langle 0|A^2[a(k,\sigma),a^\dagger(k,\sigma)]|0\rangle, \tag{2.4.2.8}$$

mà $[a(k,\sigma), a^\dagger(p,\sigma')] = \delta(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{k})g^{\sigma\sigma'}$ và $A = \sqrt{2E_k}(2\pi)^{\frac{3}{2}}$ nên

$$\langle p|p\rangle = (2\pi)^3 2E_p \delta^3(0). \tag{2.4.2.9}$$

Mặc khác ta có

$$\delta(\overrightarrow{p}) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i\overrightarrow{p}\overrightarrow{x}} \tag{2.4.2.10}$$

$$\Rightarrow \delta^3(0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x = \frac{V}{(2\pi)^3}. \tag{2.4.2.11}$$

Mở rộng cho trường hợp bốn chiều ta được

$$\delta^4(0) = \frac{TV}{(2\pi)^4}, \tag{2.4.2.12}$$

với $|i\rangle = |p_1\rangle|p_2\rangle$; $|f\rangle = \prod_{j=1}^n |p_j\rangle$ nên suy ra

$$\langle i|i\rangle = (2E_1V)(2E_2V) \quad ; \quad \langle f|f\rangle = \prod_{j=1}^{n}(2E_jV). \tag{2.4.2.13}$$

Tiếp theo ta cần phải tính biên độ tán xạ $\langle f|S|i\rangle$. Ma trận S là ma trận đặc trưng cho sự tương tác, chuyển hạt từ trạng thái $i \to f$. Tuy nhiên trong trường hợp không có sự tương tác, ma trận này đơn thuần chỉ là 1. Để mang tính tổng quát ta viết lại

$$S = 1 + i\Gamma. \tag{2.4.2.14}$$

Ma trận Γ mới thực sự đặc trưng cho sự tương tác giữa các trường. Mặc khác trong các quá trình tương tác, ở trạng thái đầu và trạng thái cuối luôn có sự bảo toàn động lượng

$$\Sigma p_i = \Sigma p_f. \tag{2.4.2.15}$$

Nếu không có định luật này thì không có tương tác xảy ra, hay nói cách khác lúc đó ma trận Γ sẽ biến mất. Để thể hiện điều đó ta viết lại

$$\Gamma = (2\pi)^4\delta^4\Big(\Sigma p_i - \Sigma p_f\Big)M = (2\pi)^4\delta^4\Big(\Sigma p\Big)M \tag{2.4.2.16}$$

với $\Sigma p = \Sigma p_i - \Sigma p_f$. Suy ra

$$\langle f|S-1|i\rangle = i(2\pi)^4\delta^4(\Sigma p)\langle f|M|i\rangle \tag{2.4.2.17}$$

$$\Rightarrow |\langle f|S|i\rangle|^2 = \delta^8(\Sigma p)(2\pi)^8|\langle f|M|i\rangle|^2. \tag{2.4.2.18}$$

Ở đây ta xét trạng thái $f \neq i$ nên $\langle f|1|i\rangle = 0$, tức là không có tương tác giữa các trường. Khi lấy tích phân biểu thức ta chỉ cần dùng một hàm δ^{-4} và từ (2.4.2.12) ta sẽ chuyển biểu thức trên thành

$$|\langle f|S|i\rangle|^2 = \delta^4(0)\delta^4(\Sigma p)(2\pi)^8|\langle f|M|i\rangle|^2$$

$$= TV\delta^4(\Sigma p)(2\pi)^4\mathcal{M}^2. \tag{2.4.2.19}$$

Trong đó ta đã đồng nhất

$$\mathcal{M}^2 \equiv |\langle f|M|i\rangle|^2. \tag{2.4.2.20}$$

$\mathcal{M}$ còn được gọi là biên độ tán xạ. Trong chương ba ta sẽ trình bày cách tính biên độ tán xạ cho tán xạ Compton. Thay tất cả vào biểu thức tính vi phân xác suất ta được:

$$\begin{aligned} d\mathrm{P} &= \frac{TV\delta^4(\Sigma p)(2\pi)^4}{(2E_1V)(2E_2V)}\frac{1}{\prod_{j=1}^{n}(2E_jV)}\mathcal{M}^2\prod_{j=1}^{n}\frac{V}{(2\pi)^3}d^3p_j \\ &= \frac{T}{V}\frac{1}{(2E_1)(2E_2)}\mathcal{M}^2 d\Pi_1, \end{aligned} \tag{2.4.2.21}$$

với

$$d\Pi_1 = \prod_{j=1}^{n}\frac{d^3p_j}{(2\pi)^3}\frac{1}{(2E_{pj})}(2\pi)^4\delta^4(\Sigma p). \tag{2.4.2.22}$$

Suy ra vi phân tiết diện tán xạ bằng

$$d\sigma = \frac{1}{(2E_1)(2E_2)|\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}|}\mathcal{M}^2 d\Pi_1. \tag{2.4.2.23}$$

Công thức trên cho thấy tiết diện tán xạ không phụ thuộc vào thể tích V và thời gian tán xạ T. Ta có thể chọn V, T $-\infty \to \infty$. Đây là công thức tính tiết diện tán xạ cho bài toán hai hạt va chạm và sinh ra nhiều hạt mới. Ở đây bài toán tán xạ Compton của chúng ta thuộc trường hợp đơn giản của bài toán trên hai hạt va chạm nhau và sinh ra hai hạt mới

$$p_1 + p_2 \to p_3 + p_4. \tag{2.4.2.24}$$

Suy ra

$$d\Pi_1 = (2\pi)^4\delta^4(\Sigma p)\frac{d^3p_3}{(2\pi)^3 2E_3}\frac{d^3p_4}{(2\pi)^3 2E_4} \tag{2.4.2.25}$$

$$= \frac{1}{16\pi^2}\delta(E_3 + E_4 - E)\delta^3\big(\overrightarrow{p_3} - (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p_4})\big)\frac{d^3p_3 d^3p_4}{E_3E_4} \tag{2.4.2.26}$$

$$= \frac{d\Omega}{16\pi^2}\int dp_4\frac{p_4^2}{E_3E_4}\delta(E_3 + E_4 - E)\big|_{\overrightarrow{p_3} = \overrightarrow{p} - \overrightarrow{p_4}}, \tag{2.4.2.27}$$

với $d\Omega$ là vi phân góc khối và

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} \quad , \quad E = E_1 + E_2, \tag{2.4.2.28}$$

trong đó

$$E_3 = \sqrt{m_3^2 + p_3^2} \quad , \quad E_4 = \sqrt{m_4^2 + p_4^2}. \tag{2.4.2.29}$$

Ta viết lại

$$d\Pi_1 = \frac{d\Omega}{16\pi^2}\int dp_f \frac{p_f^2}{E_3E_4}\delta(E_3+E_4-E)\big|_{\overrightarrow{p_3}=\overrightarrow{p}-\overrightarrow{p_4}}, \tag{2.4.2.30}$$

ở đây

$$p_f = |\overrightarrow{p_3}| = |\overrightarrow{p_4}|. \tag{2.4.2.31}$$

Ta sẽ đơn giản biểu thức trên bằng cách bỏ tích phân đi, đặt

$$x = E_3 + E_4 - E, \tag{2.4.2.32}$$

với E không đổi suy ra

$$\frac{dx}{dp_f} = \frac{d(E_3+E_4-E)}{dp_f} = \frac{d\sqrt{m_3^2+p_3^2}}{dp_f} + \frac{d\sqrt{m_4^2+p_4^2}}{dp_f} = \frac{p_f}{E_3} + \frac{p_f}{E_4} = \frac{E_3+E_4}{E_3E_4}p_f. \tag{2.4.2.33}$$

Thay vào biểu thức (2.4.2.30) ta có

$$d\Pi_1 = \frac{d\Omega}{16\pi^2}\int_{m_3+m_4-E}^{\infty} dx\frac{p_f}{E}\delta(x) = \frac{d\Omega}{16\pi^2}\frac{p_f}{E}\theta(E-m_3-m_4). \tag{2.4.2.34}$$

Mặc khác

$$|\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}| = \left|\frac{|\overrightarrow{p_1}|}{m_1} + \frac{|\overrightarrow{p_2}|}{m_2}\right| = \left|\frac{|\overrightarrow{p_1}|}{E_1} + \frac{|\overrightarrow{p_2}|}{E_2}\right|, \tag{2.4.2.35}$$

mà

$$|\overrightarrow{p_1}| = |\overrightarrow{p_2}| = |\overrightarrow{p_i}| \tag{2.4.2.36}$$

nên suy ra

$$|\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}| = |\overrightarrow{p_i}|\frac{E}{E_1E_2}. \tag{2.4.2.37}$$

Thay vào phương trình (2.4.2.23) kết hợp (2.4.2.30) suy ra [2]

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{1}{64\pi^2E^2}\frac{|\overrightarrow{p_f}|}{|\overrightarrow{p_i}|}\mathcal{M}^2\theta(E-m_3-m_4). \tag{2.4.2.38}$$

Tóm tắt

1/ Hàm Lagrangian của trường tổng hợp photon và trường dirac là

$$L = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi,$$

lúc đó L bất biến. Số hạng $q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$ là số hạng đặc trưng cho sự tương tác của hai trường.

2/ Tiết diện tán xạ cho quá trình tán xạ $2 \to 2$ được xác định bằng biểu thức

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{1}{64\pi^2E^2}\frac{|\overrightarrow{p_f}|}{|\overrightarrow{p_i}|}\mathcal{M}^2\theta(E-m_3-m_4),$$

trong đó $\mathcal{M}^2 \equiv |\langle f|M|i\rangle|^2$ và $\langle f|S|i\rangle = i(2\pi)^4\delta^4(\Sigma p)\langle f|M|i\rangle$.

Tiết diện tán xạ cho phép ta tính được số biến cố của quá trình tán xạ và là đại lượng đo dược trong thực nghiệm, giúp chúng ta kiểm tra tính đúng đắn của lý thuyết.

Chương 3

Tán xạ Compton

3.1 Áp dụng Định lý Wick

Ở phần lý thuyết tương tác ta đã xây dựng được công thức tính tiết diện tán xạ, tuy nhiên biểu thức này phụ thuộc vào $\mathcal{M}$ là đại lượng chưa biết. Để tính được đại lượng trên ta sẽ sử dụng một phương pháp tính bằng cách dùng định lý Wick. Như đã biết biểu thức tính

$$\left\langle 0 \middle| \top\big(\phi(x_1)\phi(x_2)\big) \middle| 0 \right\rangle$$

chính là hàm truyền của các trường. Tuy nhiên khi bài toán mở rộng cho nhiều trường, yêu cầu đặt ra là làm thế nào để tính

$$\left\langle 0 \middle| \top\big(\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)....\phi(x_m)\big) \middle| 0 \right\rangle,$$

ta sẽ xét lại trường hợp đơn giản $\left\langle 0 \middle| \top\big(\phi(x_1)\phi(x_2)\big) \middle| 0 \right\rangle$.
Với hàm $\phi(x)$ nào ta cũng tách được thành hai thành phần

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x), \tag{3.1.0.1}$$

với

$$\phi^+(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2E_p}} a_p e^{-ipx} \quad ; \quad \phi^-(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2E_p}} a_p^\dagger e^{ipx}. \tag{3.1.0.2}$$

Sở dĩ ta tách như trên vì ta sẽ dựa vào các tính chất

$$\phi^+(x)\big|0\big\rangle = 0 \quad ; \quad \big\langle 0\big|\phi^-(x) = 0$$

này để tính toán. Xét $x_0 > y_0$ khi đó

$$\top\big(\phi(x)\phi(y)\big) = \phi^+(x)\phi^+(y) + \phi^+(x)\phi^-(y) + \phi^-(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^-(y)$$

$$
\begin{aligned}
&= \phi^+(x)\phi^+(y) + \phi^-(y)\phi^+(x) + \phi^-(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^-(y) \\
&\quad + [\phi^+(x), \phi^-(y)].
\end{aligned} \tag{3.1.0.3}
$$

Tương tự với trường hợp $y_0 > x_0$, tổng quát ta có

$$
\left\langle 0 \middle| \top\big(\phi(x)\phi(y)\big) \middle| 0 \right\rangle = \theta(x_0 - y_0)[\phi^+(x), \phi^-(y)] + \theta(y_0 - x_0)[\phi^+(y), \phi^-(x)] \tag{3.1.0.4}
$$

Đặt

$$
\overbracket{\phi(x)\phi(y)} = \theta(x_0 - y_0)[\phi^+(x), \phi^-(y)] + \theta(y_0 - x_0)[\phi^+(y), \phi^-(x)], \tag{3.1.0.5}
$$

suy ra

$$
\overbracket{\phi(x)\phi(y)} = \left\langle 0 \middle| \top\big(\phi(x)\phi(y)\big) \middle| 0 \right\rangle = \pi(x - y) \tag{3.1.0.6}
$$

hay nói cách khác kết hợp giữa $\phi(x)$ và $\phi(y)$ chính là hàm truyền $\pi(x - y)$.
Ta định nghĩa ký hiệu trật tự thông thường N, để sắp xếp các toán tử sinh hủy theo trật tự sao cho các toán tử hủy ở bên trái và các toán tử sinh ở bên phải

$$
N(a_p a_k^\dagger a_k) \equiv a_k^\dagger a_k a_p, \tag{3.1.0.7}
$$

lúc đó

$$
\left\langle 0 \middle| \top\big(\phi(x)\phi(y)\big) \middle| 0 \right\rangle = N\big(\phi(x)\phi(y) + \overbracket{\phi(x)\phi(y)}\big). \tag{3.1.0.8}
$$

Định lý Wick có nội dung như sau

$$
\left\langle 0 \middle| \top\big(\phi(x_1)\phi(x_2)....\phi(x_m)\big) \middle| 0 \right\rangle = N\big(\phi(x_1)\phi(x_2)....\phi(x_m) + \text{tất cả các kết hợp}\big). \tag{3.1.0.9}
$$

Ta sẽ chứng minh định lý trên bằng phương pháp quy nạp. Biểu thức trên đã đúng với trường hợp 2 trường, ta giả sử nó đúng với trường hợp (m - 1) trường và cần đi chứng minh cho m trường.
Để đơn giản ta xét trường hợp $x_1 > x_2 > .... > x_m$

$$
\begin{aligned}
\top(\phi_1\phi_2...\phi_m) &= \phi_1\phi_2...\phi_m \\
&= \phi_1 N(\phi_2\phi_3...\phi_m + \text{ tất cả các kết hợp trừ } \phi_1 \text{)} \\
&= (\phi_1^+ + \phi_1^-) N(\phi_2\phi_3...\phi_m + \text{ tất cả các kết hợp trừ } \phi_1 \text{)}.
\end{aligned} \tag{3.1.0.10}
$$

Ta có

$$
\begin{aligned}
\phi_1^+ N(\phi_2\phi_3...\phi_m) &= N(\phi_2\phi_3...\phi_m)\phi_1^+ + [\phi_1^+, N(\phi_2\phi_3...\phi_m)] \\
&= N(\phi_1^+\phi_2\phi_3...\phi_m) + N([\phi_1^+, \phi_2^-]\phi_3...\phi_m + \phi_2[\phi_1^+, \phi_3^-]...\phi_m + ...) \\
&= N(\phi_1^+\phi_2\phi_3...\phi_m + \overbracket{\phi_1\phi_2}\phi_3...\phi_m + \overbracket{\phi_1\phi_2\phi_3}...\phi_m + ...)
\end{aligned} \tag{3.1.0.11}
$$

Tương tự với trường hợp còn lại $\phi_1^- N(\phi_2\phi_3...\phi_m)$ ta suy ra điều phải chứng minh.

Sau khi chứng minh được định lý Wick ta sẽ áp dụng vào để tính ví dụ cho trường hợp bốn trường.

$$\begin{aligned}\langle 0|\top(\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4)|0\rangle = N\big(&\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 + \wick{\c\phi_1\c\phi_2}\phi_3\phi_4 + \wick{\c\phi_1\phi_2\c\phi_3}\phi_4 + \wick{\c\phi_1\phi_2\phi_3\c\phi_4} + \phi_1\wick{\c\phi_2\c\phi_3}\phi_4 \\ &+ \phi_1\wick{\c\phi_2\phi_3\c\phi_4} + \phi_1\phi_2\wick{\c\phi_3\c\phi_4} + \wick{\c1\phi_1\c1\phi_2\c2\phi_3\c2\phi_4} + \wick{\c1\phi_1\c2\phi_2\c1\phi_3\c2\phi_4} + \wick{\c1\phi_1\c2\phi_2\c2\phi_3\c1\phi_4}\big).\end{aligned} \tag{3.1.0.12}$$

Vì

$$\langle 0|N(\phi)|0\rangle = 0 \tag{3.1.0.13}$$

với $\forall\phi$, nên suy ra

$$\langle 0|\top(\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4)|0\rangle = \pi(x_1-x_2)\pi(x_3-x_4)+\pi(x_1-x_3)\pi(x_2-x_4)+\pi(x_1-x_4)\pi(x_2-x_3). \tag{3.1.0.14}$$

Như vậy ta thu được biểu thức tính đơn giản hơn rất nhiều. Ta sẽ áp dụng để tính đại lượng $\mathcal{M}^2$ trong quá trình tán xạ Compton: photon có xung lượng p_1 đến va chạm với electron có xung lượng p_2 và sinh ra hai hạt mới electron và photon lần lượt có xung lượng p_3 và p_4

$$p_1 + p_2 \to p_3 + p_4.$$

Ta định nghĩa biên độ tán xạ [3]

$$\langle f|S|i\rangle = \langle p_3, p_4|\top\big(e^{-i\int d^4x L_I}\big)|p_1, p_2\rangle, \tag{3.1.0.15}$$

với $L_I = q\bar{\psi}\psi A_\mu\gamma^\mu$ là hàm Lagrangian tương tác giữa photon và electron.

$|p_i\rangle$ và $\langle p_f|$ được định nghĩa ở phương trình (2.2.4.1)

$$|p,\sigma\rangle = Ca^\dagger(p,\sigma)|0\rangle \quad , \quad \langle p,\sigma| = \langle 0|Ca(p,\sigma).$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\langle f|S|i\rangle &= \langle p_3, p_4|\top\big(e^{-i\int d^4xq\bar{\psi}\psi A_\mu\gamma^\mu}\big)|p_1, p_2\rangle \\ &= \langle p_3, p_4|\top\Big(1 + \frac{-iq}{1!}\int d^4x\bar{\psi}_\alpha\gamma^\mu A_\mu\psi_\beta + \frac{(-iq)^2}{2!}\int d^4x\bar{\psi}_\alpha\gamma^\mu A_\mu\psi_\beta \\ &\qquad \int d^4y\bar{\psi}_\rho\gamma^\nu A_\nu\psi_\gamma\Big)|p_1, p_2\rangle \\ &= \langle p_3, p_4|\top\Big(\frac{(-iq)^2}{2!}\int d^4x\bar{\psi}_\alpha\gamma^\mu A_\mu\psi_\beta\int d^4y\bar{\psi}_\rho\gamma^\nu A_\nu\psi_\gamma\Big)|p_1, p_2\rangle,\end{aligned} \tag{3.1.0.16}$$

ở đây ta có biểu thức trên vì ta đã khai triển đến hàm bậc hai, vì số hạng 1 chứng tỏ không có sự tương tác, số hạng bậc 1 có một thành phần không kết hợp nên sẽ bằng 0.

Đây là bậc thấp nhất cho đóng góp, gọi là gần đúng cây. Các khai triển hàm mũ cao hơn cho đóng góp được gọi là các bổ đính lượng tử. Nếu q < 1 thì đóng góp bậc cây sẽ là lớn nhất, trường hợp này ta có lý thuyết nhiễu loạn. Khi q lớn cách làm này tỏ ra không ổn mà ta phải thay bằng lý thuyết khác. Trong trường hợp này các hạt ở trạng thái tự do cách rất xa thời điểm tương tác.

Theo định lý Wick ta có

$$\langle f|S|i\rangle = 2\frac{(-iq)^2}{2!}\left\{\langle p_3,p_4|\int d^4x\bar{\psi}_\alpha\psi_\beta A_\mu\gamma^\mu\int d^4y\bar{\psi}_\rho\psi_\gamma A_\nu\gamma^\nu|p_1,p_2\rangle \right.$$
$$\left. + \langle p_3,p_4|\int d^4x\bar{\psi}_\alpha\psi_\beta A_\mu\gamma^\mu\int d^4y\bar{\psi}_\rho\psi_\gamma A_\nu\gamma^\nu|p_1,p_2\rangle\right\} \tag{3.1.0.17}$$

Ở đây xuất hiện hệ số 2 vì ta có thể hoán đổi vị trí của x và y và tạo ra các kết hợp mới. Mặc khác có

$$\begin{aligned}
\langle 0|A^\mu(x)|p,\sigma\rangle &= \epsilon^\mu(p,\sigma)e^{-ipx},\\
\langle p,\sigma|A^\mu(x)|0\rangle &= \epsilon^{\mu*}(p,\sigma)e^{ipx},\\
\langle 0|\psi^\alpha(x)|p,\sigma\rangle &= u^\alpha(p,\sigma)e^{-ipx},\\
\langle p,\sigma|\psi^\alpha(x)|0\rangle &= \bar{u}^\alpha(p,\sigma)e^{ipx},
\end{aligned}$$

và chú ý $\psi_\beta\bar{\psi}_\rho$ chính là hàm truyền của trường Dirac ta suy ra

$$\begin{aligned}
\langle f|S|i\rangle &= (-iq)^2\int\int\int d^4xd^4y\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\bar{u}_\alpha(p_3)\gamma^\mu_{\alpha\beta}\left(\frac{i(\not{p}+m)^{\beta\rho}}{p^2-m^2}e^{-ip(x-y)}\right)\gamma^\nu_{\rho\gamma}u_\gamma(p_2)\\
&\quad\left\{e^{ip_3x}\epsilon^*_\mu(p_4)e^{ip_4x}e^{-ip_2y}\epsilon_\nu(p_1)e^{-ip_1y}+e^{ip_3x}\epsilon^*_\nu(p_4)e^{ip_4y}e^{-ip_2y}\epsilon_\mu(p_1)e^{-ip_1x}\right\}\\
&= (-iq)^2\int\int\int d^4xd^4y\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\bar{u}_\alpha(p_3)\gamma^\mu_{\alpha\beta}\left(\frac{i(\not{p}+m)^{\beta\rho}}{p^2-m^2}\right)\gamma^\nu_{\rho\gamma}u_\gamma(p_2)\\
&\quad\left\{e^{i(p_3+p_4-p)x}e^{i(p-p_2-p_1)y}\epsilon^*_\mu(p_4)\epsilon_\nu(p_1)+e^{i(p_3-p_1-p)x}e^{i(p-p_2+p_4)y}\epsilon^*_\nu(p_4)\epsilon_\mu(p_1)\right\}\\
&= (-iq)^2\int\int\int d^4xd^4y\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\bar{u}_\alpha(p_3)\left(\frac{i(\not{p}+m)^{\beta\rho}}{p^2-m^2}\right)\epsilon^*_\mu(p_4)\epsilon_\nu(p_1)\\
&\quad\left\{e^{i(p_3+p_4-p)x}e^{i(p-p_2-p_1)y}\gamma^\mu_{\alpha\beta}\gamma^\nu_{\rho\gamma}+e^{i(p_3-p_1-p)x}e^{i(p-p_2+p_4)y}\gamma^\nu_{\alpha\beta}\gamma^\mu_{\rho\gamma}\right\}u_\gamma(p_2)
\end{aligned}$$

Sử dụng tính chất của hàm Delta - Dirac ta có

$$\langle f|S|i\rangle = -q^2(2\pi)^4\int d^4p\left(\frac{i(\not{p}+m)^{\beta\rho}}{p^2-m^2}\right)\bar{u}_\alpha(p_3)\left\{\delta(p_3+p_4-p)\delta(p-p_2-p_1)\gamma^\mu_{\alpha\beta}\gamma^\nu_{\rho\gamma}\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+ \delta(p_3 - p_1 - p)\delta(p - p_2 + p_4)\gamma^\nu_{\alpha\beta}\gamma^\mu_{\rho\gamma}\big\} u_\gamma(p_2)\epsilon^*_\mu(p_4)\epsilon_\nu(p_1) \\
= &-q^2(2\pi)^4\bar{u}_\alpha(p_3)\left\{\gamma^\mu_{\alpha\beta}\left(\frac{i((\not{p}_1 + \not{p}_2) + m)^{\beta\rho}}{(p_1 + p_2)^2 - m^2}\right)\gamma^\nu_{\rho\gamma}\delta(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)\right. \\
&\left.+ \gamma^\nu_{\alpha\beta}\left(\frac{i((\not{p}_2 - \not{p}_4) + m)^{\beta\rho}}{(p_2 - p_4)^2 - m^2}\right)\gamma^\mu_{\rho\gamma}\delta(p_3 - p_1 - p_2 + p_4)\right\} u_\gamma(p_2)\epsilon^*_\mu(p_4)\epsilon_\nu(p_1) \\
= &-q^2(2\pi)^4\bar{u}_\alpha(p_3)\left\{\gamma^\mu_{\alpha\beta}\left(\frac{i(\not{p} + m)^{\beta\rho}}{p^2 - m^2}\right)\gamma^\nu_{\rho\gamma}\delta(\Sigma p)\right. \\
&\left.+ \bar{u}_\alpha(p_3)\gamma^\nu_{\alpha\beta}\left(\frac{i(\not{p}' + m)^{\beta\rho}}{p'^2 - m^2}\right)\gamma^\mu_{\rho\gamma}\delta(\Sigma p')\right\} u_\gamma(p_2)\epsilon^*_\mu(p_4)\epsilon_\nu(p_1), \qquad (3.1.0.18)
\end{aligned}
$$

trong đó

$$
p = p_1 + p_2 \ ; \ p' = p_2 - p_4. \qquad (3.1.0.19)
$$

Mà $\langle f|S|i\rangle = i(2\pi)^4\delta^4(\Sigma p)\mathcal{M}$, suy ra

$$
\mathcal{M} = -q^2\bar{u}_\alpha(p_3)\left\{\gamma^\mu_{\alpha\beta}\left(\frac{(\not{p} + m)^{\beta\rho}}{p^2 - m^2}\right)\gamma^\nu_{\rho\gamma} + \gamma^\nu_{\alpha\beta}\left(\frac{(\not{p}' + m)^{\beta\rho}}{p'^2 - m^2}\right)\gamma^\mu_{\rho\gamma}\right\} u_\gamma(p_2)\epsilon^*_\mu(p_4)\epsilon_\nu(p_1). \qquad (3.1.0.20)
$$

3.2 Áp dụng quy tắc Feynman

Ta đã sử dụng định lý Wick để tính biên độ tán xạ. Đối với bài toán phức tạp có nhiều hạt hoặc tính các bổ đính lượng tử, việc sử dụng định lý Wick là không hiệu quả vì thế mà người ta thay bằng sử dụng giản đồ Feynman và các quy tắc Feynman để tính biên độ tán xạ. Quy tắc này rất ngắn gọn và hiệu quả, có thể dùng trong các tính toán tự động hóa.

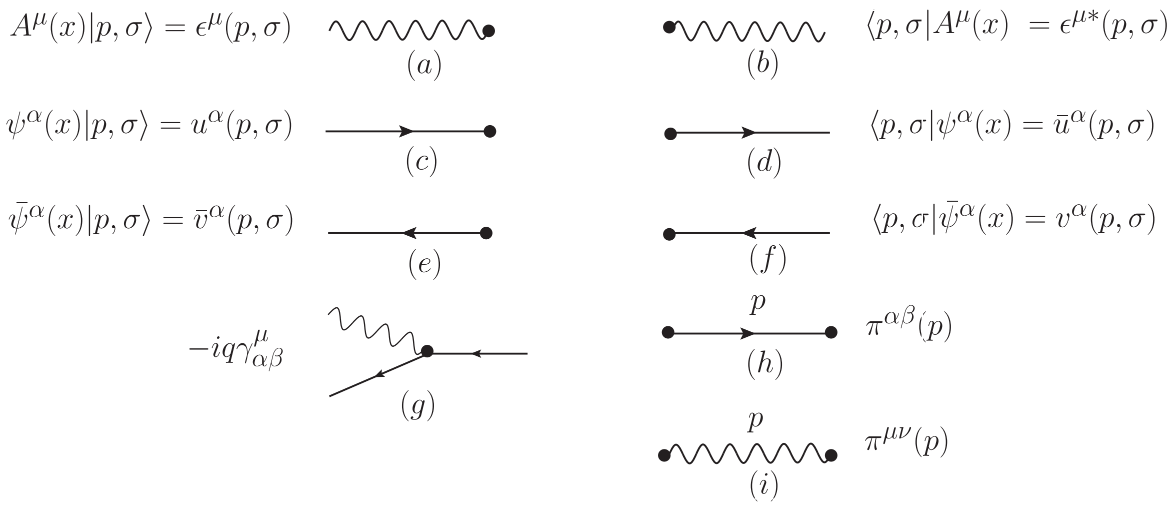
Từ phương trình (3.1.0.20) ta suy ra quy tắc Feynman cho điện động lực lượng tử ở hình 3.1:

Photon được kí hiệu bằng đường gợn sóng, vì hạt và phản hạt trùng nhau nên đường gợn sóng sẽ không có mũi tên. Ở hình 3.1a ứng với photon đi vào ở trạng thái đầu và 3.1b ứng với photon đi ra ở trạng thái cuối.

Đối với electron và phản hạt là positron vì nó mang chỉ số spinor, tương ứng với dòng spinor, ta sẽ kí hiệu bằng đường thẳng có mũi tên, 3.1c, 3.1d tương ứng electron, 3.1e, 3.1f tương ứng positron. Các hình 3.1c, 3.1e chỉ hạt ở trạng thái đầu, 3.1d, 3.1f chỉ hạt ở trạng thái cuối.

Hình 3.1g chỉ các đỉnh, tại các đỉnh này phải bảo toàn xung lượng.

Hình 3.1h, 3.1i chính là hàm truyền Dirac và hàm truyền photon trong không gian xung lượng.



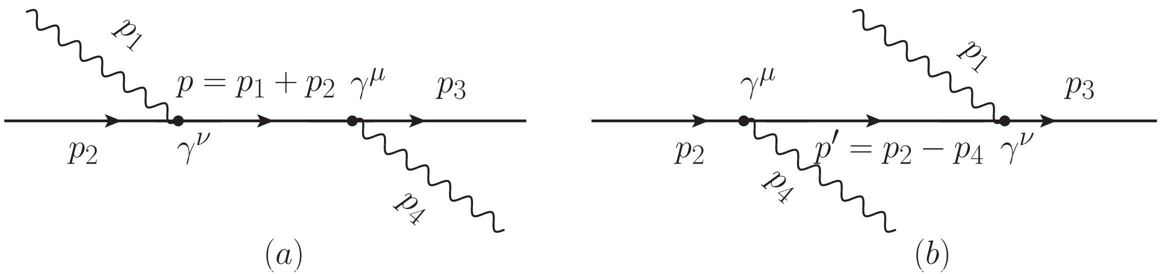
Hình 3.1: Quy tắc Feynman

Ta sẽ dùng quy tắc Feynman để tính biên độ tán xạ cho tán xạ Compton

$$p_1 + p_2 \to p_3 + p_4$$

trong đó p_1, p_2 là xung lượng của photon và electron ở trạng thái đầu, p_3, p_4 là xung lượng của electron và photon ở trạng thái cuối.

Khi tính biên độ ta phải vẽ tất cả các giản đồ Feynman có thể có ở gần đúng bậc lượng tử mà ta xét. Trong gần đúng bậc cây, (bậc lượng tử thấp nhất) của tán xạ Compton có hai giản đồ tán xạ sau



Hình 3.2: Giản đồ Feynman

Áp dụng quy tắc Feynman theo thứ tự ngược chiều dòng mũi tên cho hình 3.2a ta được

$$\mathcal{M}_a = (-iq)^2 \bar{u}_\alpha(p_3,\lambda)\gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{(\not{p}+m)^{\beta\rho}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}\gamma^\nu_{\rho\gamma} u_\gamma(p_2,\lambda')\epsilon^*_\mu(p_4,\sigma)\epsilon_\nu(p_1,\sigma') \tag{3.2.0.1}$$

với $p = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$.

Tương tự áp dụng quy tắc Feynman cho hình 3.2b ta được

$$\mathcal{M}_b = (-iq)^2 \bar{u}_\alpha(p_3, \lambda)\gamma^\nu_{\alpha\beta} \frac{(\not{p}' + m)^{\beta\rho}}{p'^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\mu_{\rho\gamma} u_\gamma(p_2, \lambda')\epsilon^*_\mu(p_4, \sigma)\epsilon_\nu(p_1, \sigma') \tag{3.2.0.2}$$

với $p' = p_2 - p_4 = p_3 - p_1$, cho $\epsilon \to 0$ suy ra

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b \\ &= -q^2 \bar{u}_\alpha(p_3, \lambda) \left\{ \gamma^\mu_{\alpha\beta} \left(\frac{(\not{p} + m)^{\beta\rho}}{p^2 - m^2} \right) \gamma^\nu_{\rho\gamma} + \gamma^\nu_{\alpha\beta} \left(\frac{(\not{p}' + m)^{\beta\rho}}{p'^2 - m^2} \right) \gamma^\mu_{\rho\gamma} \right\} u_\gamma(p_2, \lambda) \\ &\quad \epsilon^*_\mu(p_4, \sigma)\epsilon_\nu(p_1, \sigma'). \end{aligned} \tag{3.2.0.3}$$

Như vậy quy tắc Feynman đưa ra cho điện động lực lượng tử cho kết quả như cách tính dùng định lý Wick. Ta sẽ đi tính đại lượng

$$\mathcal{M}^2 = (\mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b)(\mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b)^\dagger = \mathcal{M}_a^2 + \mathcal{M}_a\mathcal{M}_b^\dagger + \mathcal{M}_a^\dagger\mathcal{M}_b + \mathcal{M}_b^2, \tag{3.2.0.4}$$

ở đây ta lấy liên hợp phức chuyển vị vì $\mathcal{M}_a$ và $\mathcal{M}_b$ là các số và việc này tương đương với lấy liên hợp phức. Từ hai biểu thức trên ta suy ra

$$\mathcal{M}_a^\dagger = -q^2 \bar{u}_{\gamma'}(p_2, \lambda')\gamma^{\nu'}_{\gamma'\rho'} \frac{(\not{p} + m)^{\rho'\beta'}}{p^2 - m^2} \gamma^{\mu'}_{\beta'\alpha'} u_{\alpha'}(p_3, \lambda)\epsilon^*_{\mu'}(p_4, \sigma)\epsilon_{\nu'}(p_1, \sigma') \tag{3.2.0.5}$$

$$\mathcal{M}_b^\dagger = -q^2 \bar{u}_{\gamma'}(p_2, \lambda')\gamma^{\mu'}_{\gamma'\rho'} \frac{(\not{p}' + m)^{\rho'\beta'}}{p'^2 - m^2} \gamma^{\nu'}_{\beta'\alpha'} u_{\alpha'}(p_3, \lambda)\epsilon^*_{\mu'}(p_4, \sigma)\epsilon_{\nu'}(p_1, \sigma'). \tag{3.2.0.6}$$

Xét photon chuyển động trên trục z với hệ véc tơ cơ sở đã chọn như ở mục 1.4, ta có

$$\sum_{\sigma=1}^{2} \epsilon_\mu(p, \sigma)\epsilon_\nu(p, \sigma) = -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu\eta_\nu + p_\nu\eta_\mu}{p.\eta} - \frac{\eta^2 p_\mu p_\nu}{(p.\eta)^2}.$$

Ta viết lại $\mathcal{M} = \epsilon_\mu \mathcal{M}^\mu$ lúc đó

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma=1}^{2} \mathcal{M}^2 &= \sum_{\sigma=1}^{2} \epsilon_\mu \mathcal{M}^\mu \epsilon^*_\nu \mathcal{M}^{\nu *} = \sum_{\sigma=1}^{2} \epsilon_\mu \epsilon^*_\nu \mathcal{M}^\mu \mathcal{M}^{\nu *} \\ &= -g_{\mu\nu}\mathcal{M}^\mu\mathcal{M}^{\nu *} + \frac{p_\mu \mathcal{M}^\mu \mathcal{M}^{\nu *}\eta_\nu + p_\nu \mathcal{M}^{\nu *}\mathcal{M}^\mu \eta_\mu}{p.\eta} - \frac{\eta^2 \mathcal{M}^\mu \mathcal{M}^{\nu *} p_\mu p_\nu}{(p.\eta)^2}, \end{aligned} \tag{3.2.0.7}$$

mà

$$p_\mu \mathcal{M}^\mu = 0,$$

suy ra

$$\sum_{\sigma=1}^{2} \epsilon_\mu \mathcal{M}^\mu \epsilon^*_\nu \mathcal{M}^{\nu *} = -g_{\mu\nu}\mathcal{M}^\mu \mathcal{M}^{\nu *},$$

từ đó ta sẽ thay

$$\sum_{\sigma=1}^{2} \epsilon_\mu(p,\sigma)\epsilon_\nu(p,\sigma) \to -g_{\mu\nu}.$$

Từ tính toán như trên ta thấy biểu thức tính sẽ cho ra kết quả cuối không phụ thuộc vào η. Ta sẽ lần lượt đi tính các số hạng trong phương trình (3.2.0.4).

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{\sigma=1}^{2}\sum_{\sigma'=1}^{2}\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{\lambda'=1}^{2} \mathcal{M}_a^2 \\
&= \sum_{\lambda=1}^{2} q^4 \bar{u}_\alpha(p_3,\lambda)\gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{(\not{p}+m)^{\beta\rho}}{p^2-m^2}\gamma^\nu_{\rho\gamma}(\not{p}_2+m)_{\gamma\gamma'}\gamma^{\nu'}_{\gamma'\rho'}\frac{(\not{p}+m)^{\rho'\beta'}}{p^2-m^2}\gamma^{\mu'}_{\beta'\alpha'}u_{\alpha'}(p_3,\lambda)g_{\mu\mu'}g_{\nu\nu'} \\
&= \sum_{\lambda=1}^{2} q^4 \mathrm{Tr}[\bar{u}_\alpha(p_3,\lambda)\gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{(\not{p}+m)^{\beta\rho}}{p^2-m^2}\gamma^\nu_{\rho\gamma}(\not{p}_2+m)_{\gamma\gamma'}\gamma_\nu^{\gamma'\rho'}\frac{(\not{p}+m)^{\rho'\beta'}}{p^2-m^2}\gamma_\mu^{\beta'\alpha'}u_{\alpha'}(p_3,\lambda)],
\end{aligned} \tag{3.2.0.8}$$

ở đây $\mathrm{Tr}(\alpha)$ bằng tổng các thành phần trên đường chéo chính của ma trận α. Ta có được biến đổi trên vì kết quả tính $\sum_{\sigma,\sigma',\lambda,\lambda'}\mathcal{M}_a^2$ ra một số và việc này sẽ không ảnh hưởng đến kết quả. Ta có một số tính chất của ma trận Dirac trong không thời gian bốn chiều cần lưu ý sau

$$\mathrm{Tr}[ABC...] = \mathrm{Tr}[CBA...] \tag{3.2.0.9}$$
$$\mathrm{Tr}[\gamma^\nu\gamma^\mu] = 4g^{\mu\nu} \tag{3.2.0.10}$$
$$\mathrm{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma] = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \tag{3.2.0.11}$$
$$\mathrm{Tr}[\gamma_1\gamma_2...\gamma_{2n+1}] = 0 \tag{3.2.0.12}$$
$$\gamma^\mu\gamma_\mu = 4 \tag{3.2.0.13}$$
$$\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma_\mu = -2\gamma^\alpha \tag{3.2.0.14}$$
$$\gamma_\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\nu = 4g^{\alpha\beta} \tag{3.2.0.15}$$
$$\gamma_\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\nu = -2\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\alpha, \tag{3.2.0.16}$$

suy ra

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{q^4}{(p^2-m^2)^2}\mathrm{Tr}[(\not{p}+m)^{\beta\rho}(-2\not{p}_2+4m)_{\rho\rho'}(\not{p}+m)^{\rho'\beta'}\gamma_\mu^{\beta'\alpha'}(\not{p}_3+m)_{\alpha'\alpha}\gamma^\mu_{\alpha\beta}] \\
&= \frac{q^4}{(p^2-m^2)^2}\mathrm{Tr}[(\not{p}+m)^{\beta\rho}(-2\not{p}_2+4m)_{\rho\rho'}(\not{p}+m)^{\rho'\beta'}(-2\not{p}_3+4m)_{\beta'\beta}] \\
&= \frac{q^4}{(p^2-m^2)^2}\mathrm{Tr}[(-2\not{p}\not{p}_2+4m\not{p}-2m\not{p}_2+4m^2)^{\beta\rho'}(-2\not{p}\not{p}_3+4m\not{p}-2m\not{p}_3+4m^2)^{\rho'\beta}] \\
&= \frac{q^4}{(p^2-m^2)^2}\mathrm{Tr}[4\not{p}\not{p}_2\not{p}\not{p}_3 - 8m\not{p}(\not{p}_2+\not{p}_3)\not{p} + 8m\not{p}\not{p}_2\not{p}_3 + 16m^2\not{p}\not{p} \\
&\quad - 16m^2\not{p}(\not{p}_2+\not{p}_3) + 32m^3\not{p} + 4m^2\not{p}_2\not{p}_3 - 8m^3(\not{p}_2+\not{p}_3) + 16m^4]
\end{aligned}$$

$$= \frac{q^4}{(p^2-m^2)^2}\Big\{16[(pp_2)(pp_3)-(pp)(p_2p_3)+(pp_3)(p_2p)]+64m^2p^2$$
$$-64m^2p(p_2+p_3)+16m^2p_2p_3+64m^4\Big\}$$
$$= \frac{16q^4}{(p^2-m^2)^2}\Big\{[2(pp_2)(pp_3)-p^2p_{23}]+4m^2p^2-4m^2p(p_2+p_3)+m^2p_{23}+4m^4\Big\}, \tag{3.2.0.17}$$

với $p_{ij}=p_ip_j$. Mặc khác

$$p=p_1+p_2=p_3+p_4$$

và

$$p_1^2=p_4^2=0 \quad ; \quad p_2^2=p_3^2=m^2$$
$$\Rightarrow p^2=m^2+2p_{12}=m^2+2p_{34}\Rightarrow p_{12}=p_{34}$$

suy ra

$$I_1 = \frac{16q^4}{4p_{12}^2}\Big\{[2(p_{12}+m^2)(p_{13}+p_{23})-(m^2+2p_{12})p_{23}]+4m^2(m^2+2p_{12})$$
$$-4m^2(m^2+p_{12}+m^2+p_{34})+m^2p_{23}+4m^4\Big\}$$
$$= \frac{4q^4}{p_{12}^2}[2p_{12}p_{13}+2m^2(p_{13}+p_{23})]$$
$$= \frac{8q^4}{p_{12}^2}[p_{12}p_{23}+m^2(m^2+p_{34})]$$
$$= \frac{8q^4}{p_{12}^2}(p_{12}p_{23}+m^4+m^2p_{12}). \tag{3.2.0.18}$$

Tương tự ta có

$$I_2 = \sum_{\sigma=1}^{2}\sum_{\sigma'=1}^{2}\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{\lambda'=1}^{2}\mathcal{M}_b^2$$
$$= \sum_{\lambda=1}^{2} q^4\bar{u}_\alpha(p_3,\lambda)\gamma^\nu_{\alpha\beta}\frac{(\not{p}'+m)^{\beta\rho}}{p'^2-m^2}\gamma^\mu_{\rho\gamma}(\not{p}_2+m)_{\gamma\gamma'}\gamma^{\mu'}_{\gamma'\rho'}\frac{(\not{p}'+m)^{\rho'\beta'}}{p'^2-m^2}\gamma^{\nu'}_{\beta'\alpha'}u_{\alpha'}(p_3,\lambda)g_{\mu\mu'}g_{\nu\nu'}, \tag{3.2.0.19}$$

biểu thức này hoàn toàn như biểu thức tính $\mathcal{M}_a^2$ nên ta sẽ được kết quả tương tự với chú ý lúc này thay $p\to p'$,

$$I_2 = \frac{16q^4}{(p'^2-m^2)^2}\Big\{[2(p'p_2)(p'p_3)-p'^2p_{23}]+4m^2p'^2-4m^2p'(p_2+p_3)+m^2p_{23}+4m^4\Big\}. \tag{3.2.0.20}$$

Mặc khác

$$p'=p_2-p_4=p_3-p_1 \tag{3.2.0.21}$$

$$\Rightarrow p'^2 = m^2 - 2p_{24} = m^2 - 2p_{13} \tag{3.2.0.22}$$

$$\Rightarrow p_{13} = p_{24}, \tag{3.2.0.23}$$

suy ra

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{16q^4}{4p_{24}^2}\Big\{[2(m^2 - p_{24})(p_{23} - p_{34}) - (m^2 - 2p_{24})p_{23}] + 4m^2(m^2 - 2p_{24}) \\
&\quad -4m^2(m^2 - p_{24} + m^2 - p_{13}) + m^2p_{23} + 4m^4\Big\} \\
&= \frac{8q^4}{p_{24}^2}(m^2(p_{23} - p_{34}) + p_{24}p_{34}) \\
&= \frac{8q^4}{p_{24}^2}(-m^2p_{13} + m^4 + p_{24}p_{34}). \qquad (3.2.0.24)
\end{aligned}$$

Tiếp tục ta sẽ đi tính đại lượng

$$\begin{aligned}
I_3 &= \sum_{\sigma=1}^{2}\sum_{\sigma'=1}^{2}\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{\lambda'=1}^{2}\mathcal{M}_a\mathcal{M}_b^\dagger \\
&= \sum_{\lambda=1}^{2} q^4\bar{u}_\alpha(p_3,\lambda)\gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{(\not p + m)^{\beta\rho}}{p^2 - m^2}\gamma^\nu_{\rho\gamma}(\not p_2 + m)_{\gamma\gamma'}\gamma^{\mu'}_{\gamma'\rho'}\frac{(\not p' + m)^{\rho'\beta'}}{p'^2 - m^2}\gamma^{\nu'}_{\beta'\alpha'}u_{\alpha'}(p_3,\lambda)g_{\mu\mu'}g_{\nu\nu'},
\end{aligned}$$

với

$$(p^2 - m^2)(p'^2 - m^2) = -2p_{12}p_{24}$$

ta được

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{-q^4}{4p_{12}p_{24}}\mathrm{Tr}[\gamma^\mu_{\alpha\beta}(\not p + m)^{\beta\rho}\gamma^\nu_{\rho\gamma}(\not p_2 + m)_{\gamma\gamma'}\gamma_\mu^{\gamma'\rho'}(\not p' + m)^{\rho'\beta'}\gamma_\nu^{\beta'\alpha'}(\not p_3 + m)_{\alpha'\alpha}] \\
&= \frac{-q^4}{4p_{12}p_{24}}\mathrm{Tr}[\gamma^\mu_{\alpha\beta}(\not p\gamma^\nu\not p_2 + m(\not p\gamma^\nu + \gamma^\nu\not p_2) + m\gamma^\nu m)_{\beta\gamma'}\gamma_\mu^{\gamma'\rho'} \\
&\quad (\not p'\gamma_\nu\not p_3 + m(\not p'\gamma_\nu + \gamma_\nu\not p_3) + m\gamma_\nu m)_{\rho'\alpha} \\
&= \frac{-q^4}{4p_{12}p_{24}}\mathrm{Tr}[(-2\not p_2\gamma^\nu\not p + 4m(p^\nu + p_2^\nu) - 2m^2\gamma^\nu)_{\alpha\rho'} \\
&\quad (\not p'\gamma_\nu\not p_3 + m(\not p'\gamma_\nu + \gamma_\nu\not p_3) + m\gamma_\nu m)_{\rho'\alpha} \\
&= \frac{-q^4}{4p_{12}p_{24}}\mathrm{Tr}[-2\not p_2\gamma^\nu\not p\not p'\gamma_\nu\not p_3 - 2m\not p_2\gamma^\nu\not p(\not p'\gamma_\nu + \gamma_\nu\not p_3) - 2m^2\not p_2\gamma^\nu\not p\gamma_\nu \\
&\quad + 4m(p^\nu + p_2^\nu)\not p'\gamma_\nu\not p_3 + 4m^2(p^\nu + p_2^\nu)(\not p'\gamma_\nu + \gamma_\nu\not p_3) + 4m^3(p^\nu + p_2^\nu)\gamma_\nu \\
&\quad - 2m^2\gamma^\nu\not p'\gamma_\nu\not p_3 - 2m^3\gamma^\nu(\not p'\gamma_\nu + \gamma_\nu\not p_3) - 2m^4\gamma^\nu\gamma_\nu] \\
&= \frac{-q^4}{4p_{12}p_{24}}\mathrm{Tr}[-8\not p_2\not p_3(pp') - 8m\not p_2(pp') + 4m\not p_2\not p\not p_3 + 4m^2\not p_2\not p \\
&\quad + 4m(p^\nu + p_2^\nu)\not p'\gamma_\nu\not p_3 + 4m^2(p^\nu + p_2^\nu)(\not p'\gamma_\nu + \gamma_\nu\not p_3) + 4m^3(p^\nu + p_2^\nu)\gamma_\nu \\
&\quad + 4m^2\not p'\not p_3 + 4m^3\not p' - 8m^3\not p_3 - 8m^4]
\end{aligned}$$

$$= \frac{-q^4}{4p_{12}p_{24}} \left\{-32p_{23}(pp') + 16m^2(p+p')(p_2+p_3) + 16m^2(p_{23}+pp') - 32m^4\right\}. \tag{3.2.0.25}$$

Mặc khác có

$$pp' = (p_1+p_2)(p_3-p_1) = p_{13}+p_{23}-p_{34} = m^2 \quad ; \quad p+p' = p_2+p_3 \tag{3.2.0.26}$$

thay vào ta có

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{-16q^4}{4p_{12}p_{24}} \left\{-2p_{23}m^2 + m^2(2m^2+2p_{23}) + m^2(m^2+p_{23}) - 2m^4\right\} \\ &= \frac{-4q^4m^2}{p_{12}p_{24}}(m^2+p_{23}) \\ &= \frac{-4q^4m^2}{p_{12}p_{24}}(2m^2+p_{12}-p_{24}) \\ &= 4q^4m^2\left(\frac{2m^2}{p_{12}p_{24}} + \frac{1}{p_{24}} - \frac{1}{p_{12}}\right). \end{aligned} \tag{3.2.0.27}$$

Chú ý biểu thức tính $\mathcal{M}_a^\dagger\mathcal{M}_b$ tương đương với biểu thức tính $\mathcal{M}_a\mathcal{M}_b^\dagger$ từ đó ta có

$$I_4 = \sum_{\sigma=1}^{2}\sum_{\sigma'=1}^{2}\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{\lambda'=1}^{2}\mathcal{M}_a^\dagger\mathcal{M}_b = 4e^4m^2\left(\frac{2m^2}{p_{12}p_{24}} + \frac{1}{p_{24}} - \frac{1}{p_{12}}\right). \tag{3.2.0.28}$$

Vì ở trạng thái đầu photon và electron đi vào chỉ ứng với duy nhất một trạng thái nên ta phải lấy trung bình cộng, tức là nhân với hệ số $\frac{1}{4}$ tổng các trạng thái, $\frac{1}{2}$ cho photon và $\frac{1}{2}$ cho electron, lúc đó

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\sum_{\sigma=1}^{2}\sum_{\sigma'=1}^{2}\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{\lambda'=1}^{2}\mathcal{M}^2 &= 2e^4\left\{\left(\frac{p_{13}}{p_{12}} + \frac{m^2}{p_{12}} + \frac{m^4}{p_{12}^2}\right) + \left(\frac{p_{12}}{p_{24}} - \frac{m^2}{p_{24}} + \frac{m^4}{p_{24}^2}\right)\right. \\ &\qquad \left. -m^2\left(\frac{2m^2}{p_{12}p_{24}} + \frac{1}{p_{24}} - \frac{1}{p_{12}}\right)\right\} \\ &= 2e^4\left\{\frac{p_{24}}{p_{12}} + \frac{p_{12}}{p_{24}} + 2m^2\left(\frac{1}{p_{12}} - \frac{1}{p_{24}}\right) + m^4\left(\frac{1}{p_{12}} - \frac{1}{p_{24}}\right)^2\right\}. \end{aligned} \tag{3.2.0.29}$$

Chọn hệ quy chiếu mà hạt electron đứng yên trước va chạm, lúc đầu photon có trạng thái $(\omega, \overrightarrow{\omega})$ chuyển động theo trục z va chạm vào hạt bia electron $(m, 0)$ sinh ra photon ở trạng thái $(\omega', \overrightarrow{\omega'})$ và electron $(E', \overrightarrow{p'})$ nên suy ra

$$p_{12} = m\omega \quad , \quad p_{24} = m\omega', \tag{3.2.0.30}$$

thay vào ta được

$$\frac{1}{4}\sum_{\sigma=1}^{2}\sum_{\sigma'=1}^{2}\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{\lambda'=1}^{2}\mathcal{M}^2 = 2e^4\left\{\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}+2m^2\left(\frac{1}{m\omega}-\frac{1}{m\omega'}\right)+m^4\left(\frac{1}{m\omega}-\frac{1}{m\omega'}\right)^2\right\}. \tag{3.2.0.31}$$

Giả sử sau khi va chạm sinh ra photon ở trạng thái mới chuyển động trong mặt phẳng Oxz. Gọi θ là góc hợp bởi xung lượng của photon và trục Oz lúc đó

$$\overrightarrow{\omega'} = (\omega'\sin\theta, 0, \omega'\cos\theta). \tag{3.2.0.32}$$

Ta có

$$\begin{aligned} m^2 = p_2^2 = (p_4+p_3-p_1)^2 &= p_3^2 + 2p_3(p_4-p_1) - 2(p_4-p_1) \\ &= m^2 + 2m(\omega-\omega') - 2\omega\omega'(1-\cos\theta), \end{aligned} \tag{3.2.0.33}$$

suy ra

$$\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{1}{m}(1-\cos\theta), \tag{3.2.0.34}$$

$$\omega' = \frac{\omega}{1+\dfrac{\omega}{m}(1-\cos\theta)}, \tag{3.2.0.35}$$

Thay vào biểu thức (3.2.0.31) ta được

$$\frac{1}{4}\sum_{\sigma=1}^{2}\sum_{\sigma'=1}^{2}\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{\lambda'=1}^{2}\mathcal{M}^2 = 2q^4\left\{\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}-\sin^2\theta\right\}. \tag{3.2.0.36}$$

Biểu thức trên được xét trong hệ quy chiếu mà hạt electron ban đầu đứng yên, biên độ tán xạ bình phương là bất biến Lorentz nên nó đúng trong hệ quy chiếu bất kì. Ta sẽ tính tiết diện tán xạ trong hệ quy chiếu này. Nhắc lại

$$d\sigma = \frac{1}{(2E_1)(2E_2)|\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2}|}\mathcal{M}^2 d\Pi_1 = \frac{1}{4\omega m}\mathcal{M}^2 d\Pi_1, \tag{3.2.0.37}$$

ở đây ta đã cho $|\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2}| = 1$.
Từ (2.4.2.27)

$$\begin{aligned} \int d\Pi_1 &= \frac{d\Omega}{16\pi^2}\int dp_4 \frac{p_4^2}{E_3E_4}\delta(E_3+E_4-E)\Big|_{\overrightarrow{p_3}=\overrightarrow{p}-\overrightarrow{p_4}} \\ &= \frac{1}{8\pi}\int d\cos\theta d\omega' \frac{\omega'}{E'}\delta(\omega' + \sqrt{m^2+|\overrightarrow{p_1}-\overrightarrow{p_4}|^2} - m - \omega) \\ &= \frac{1}{8\pi}\int d\cos\theta d\omega' \frac{\omega'}{E'}\delta(\omega' + \sqrt{m^2+\omega^2+(\omega')^2-2\omega\omega'\cos\theta} - m - \omega) \\ &= \frac{1}{8\pi}\int d\cos\theta \frac{\omega'}{E'}\left(1+\frac{\omega'-\omega\cos\theta}{E'}\right)^{-1} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int d\cos\theta \frac{\omega'}{E' + \omega' - \omega\cos\theta}, \tag{3.2.0.38}$$

ở đây ta đã áp dụng tính chất của hàm Delta - Dirac

$$dx\delta(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}. \tag{3.2.0.39}$$

Vì trong quá trình tán xạ năng lượng của hệ được bảo toàn

$$\omega + m = E' + \omega',$$

và từ (3.2.0.35) ta suy ra

$$\int d\Pi_1 = \frac{1}{8\pi}\int d\cos\theta \frac{\omega'}{m + \omega(1 - \cos\theta)} = \frac{1}{8\pi}\int d\cos\theta \frac{(\omega')^2}{\omega m}. \tag{3.2.0.40}$$

Từ đó ta có vi phân tiết diện tán xạ

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{1}{4\omega m}\frac{1}{8\pi}\frac{(\omega')^2}{\omega m}2q^4\left\{\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta\right\} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left\{\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta\right\}, \tag{3.2.0.41}$$

với $\alpha = \frac{q^2}{4\pi}$, α gọi là hằng số tinh tế.

Biểu thức trên được gọi là biểu thức Klein - Nishina [4].

Khi $\omega << m$ suy ra $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\omega}{\omega'} \to 1$ lúc đó

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2}(1 + \cos^2\theta). \tag{3.2.0.42}$$

Biểu thức trên được gọi là tiết diện tán xạ Thomson [2].

Chương 4

Kết luận

Khóa luận này đã tìm hiểu được về hình thức luận Lagrangian, lý thuyết về điện động lực học lượng tử, các đặc điểm và tính chất của trường photon, trường Dirac và lý thuyết tương tác.

Khóa luận đã chứng minh được định lý Wick rồi suy ra quy tắc Feynman, từ đó đi tính vi phân tiết diện tán xạ và biên độ tán xạ trong quá trình tán xạ Compton cho các hạt ở trạng thái đầu tự do bằng cả hai con đường: dùng định lý Wick và giản đồ Feynman rồi so sánh kết quả với nhau. Từ đó cho thấy giản đồ Feynman là một công cụ hiệu quả trong việc tính toán tiết diện tán xạ. Kết quả cuối cùng khi tính biên độ tán xạ chính là công thức tính tiết diện tán xạ Klein - Nishina, và công thức này đã được kiểm chứng trong thực nghiệm, điều đó đã khẳng định lý thuyết về QED là đúng đắn.

Việc tìm ra tiết diện tán xạ mang ý nghĩa to lớn trong việc nghiên cứu xác xuất va chạm của các hạt, cho biết mức độ tương tác giữa các hạt, từ đó ứng dụng trong thực tế vào các ngành thực nghiệm: xác định độ dày vật liệu, cấu trúc nguyên tử, phân tử và hạt nhân,...Hiểu rõ về tiết diện tán xạ như Compton, Thomson, tán xạ trên hạt nhân là điều rất quan trọng trong các thí nghiệm vật lý hạt cơ bản, vật lý hạt nhân.

Ngoài những mặt làm được, khóa luận này vẫn còn những mặt chưa làm được là chỉ mới tính tiết diện tán xạ cho các hạt ở trạng thái đầu tự do, trong khi bài toán thực tiễn các hạt đầu không tự do, chịu sự tương tác trong nguyên tử.

Công thức tính tiết diện tán xạ chưa được khóa luận so sánh với thực nghiệm.

Khóa luận chỉ mới xét tán xạ đơn mà chưa xét tán xạ đa, cũng là một yếu tố làm thay đổi tiết diện tán xạ.

Tài liệu tham khảo

[1] Đào Văn Phúc. Lịch sử vật lý học. Nhà xuất bản Giáo dục Hà Nội, 2003.

[2] Matthew D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 2014.

[3] Michael Edward Peskin and Daniel V. Schroeder. An Introduction to quantum field theory. Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p.

[4] O. Klein and Y. Nishina. Über die streuung von strahlung durch freie elektronen nach der neuen relativistischen quantendynamik von dirac. *Zeitschrift für Physik*, 52(11):853–868, Nov 1929.