

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN  
KHOA VẬT LÝ-VẬT LÝ KỸ THUẬT

**BỔ ĐÍNH TƯƠNG TÁC MẠNH MỘT VÒNG  
CỦA QUÁ TRÌNH  $Z \rightarrow b + \bar{b}$   
TRONG MÔ HÌNH CHUẨN**

KHÓA LUẬN TỐT NGHIỆP HỆ ĐẠI HỌC CHÍNH QUY

Ngành: Vật lý lý thuyết

Người hướng dẫn khoa học: TS. Lê Đức Ninh

Sinh viên thực hiện: Nguyễn Hoàng Đại Nghĩa

TP. HỒ CHÍ MINH - 2014

# Lời cảm ơn

Trước hết, tôi xin được chân thành cảm ơn TS. Lê Đức Ninh, người đã tận tâm hướng dẫn và tạo điều kiện cho tôi hoàn thành được khóa luận này.

Tôi cũng xin trân trọng cảm ơn quý thầy cô trong bộ môn Vật lý lý thuyết, Trường Đại học Khoa học tự nhiên TP Hồ Chí Minh đã truyền đạt cho tôi những kiến thức quý giá, sự nhiệt huyết và niềm đam mê khoa học.

Đặc biệt, con xin cảm ơn ba mẹ đã luôn tạo điều kiện cho con có được môi trường học tập tốt nhất. Cảm ơn ba mẹ đã luôn động viên, cổ vũ con đi trên con đường nghiên cứu khoa học mà con đã chọn.

*TP. Hồ Chí Minh, ngày 30 tháng 06 năm 2014*

Sinh viên

**Nguyễn Hoàng Đại Nghĩa**

# Lời nói đầu

Cho tới thời điểm này, các máy gia tốc lớn trên thế giới như máy LHC vẫn đang liên tục cho các hạt vi mô va chạm với nhau ở tốc độ cao để phục vụ cho việc nghiên cứu các hiện tượng vật lý mới. Đồng thời cũng để kiểm nghiệm những tiên đoán của Mô hình chuẩn (SM), mô hình tổng kết những hiểu biết của chúng ta về các phần tử cơ bản cấu tạo ra vật chất và tương tác giữa chúng.

Để kiểm chứng Mô hình chuẩn, chúng ta phải tính toán những đại lượng vật lý có thể quan sát được như tiết diện tán xạ ( $\sigma$ ) hay bề rộng phân rã ( $\Gamma$ ). Tuy nhiên, những tính toán đó lại dựa trên cơ sở lý thuyết nhiễu loạn. Do đó, để thu được kết quả chính xác, chúng ta cần phải kể đến đóng góp của các bậc đỉnh bậc cao, nghĩa là phải đi tính các tích phân của các giản đồ vòng. Nhưng việc làm này lại không dễ dàng, vì các tích phân của giản đồ vòng thường bị phân kì.

Mục tiêu chính của khóa luận này là tìm hiểu và áp dụng phương pháp tính toán các bậc đỉnh bậc cao QCD cho những quá trình tán xạ. Mà cụ thể là quá trình phân rã của boson Z cho ra quark bottom và phản-quark bottom, là một trong rất nhiều kênh phân rã của boson Z.

Khóa luận được chia thành các chương như sau:

- Chương 1 trình bày về các quy tắc Feynman và các bước tính bề rộng phân rã trong trường hợp đơn giản nhất là giản đồ cây.
- Chương 2 trình bày các kết quả thu được từ việc tính tích phân vòng trong trường hợp giản đồ 1 vòng của gluon ảo bằng phương pháp hiệu chỉnh thứ nguyên và phương pháp rút gọn Passarino-Veltman.
- Chương 3 trình bày về các bước tính và kết quả của bề rộng phân rã boson Z

trong trường hợp gluon thực. Đồng thời đưa ra kết quả cuối cùng từ việc lấy tổng cả hai trường hợp gluon thực và ảo.

- Chương 4 là phần kết luận và hướng phát triển tiếp theo của đề tài.
- Phụ lục bao gồm các công thức toán học đã được sử dụng.

Dù chúng tôi đã cố gắng hết sức, nhưng khóa luận vẫn khó tránh khỏi những thiếu sót. Kính mong nhận được những ý kiến đóng góp, nhận xét từ quý thầy cô và những người quan tâm đến đề tài để khóa luận được hoàn chỉnh hơn.

# Mục lục

<b>1</b>	<b>Bề rộng phân rã ở mức độ cây</b>	<b>1</b>
1.1	Các quy tắc Feynman . . . . .	1
1.2	Tính bề rộng phân rã mức độ cây . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Bề rộng phân rã cho trường hợp gluon ảo</b>	<b>7</b>
2.1	Công thức rút gọn LSZ . . . . .	7
2.2	Vận dụng phương pháp Passarino-Veltman . . . . .	10
2.2.1	Biên độ Feynman của giản đồ một vòng 3 đỉnh . . . . .	10
2.2.2	Bề rộng phân rã ứng với gluon ảo . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Bề rộng phân rã trong trường hợp gluon thực</b>	<b>18</b>
3.1	Bề rộng phân rã ứng với gluon thực . . . . .	18
3.2	Tổng đóng góp của hai trường hợp gluon thực và ảo . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Kết luận và hướng phát triển</b>	<b>29</b>
4.1	Kết luận . . . . .	29
4.2	Hướng phát triển . . . . .	30
	<b>Phụ lục A Các công thức cần lưu ý</b>	<b>31</b>
	<b>Tài liệu tham khảo</b>	<b>33</b>

# Kí hiệu viết tắt

IR (Infrared): Hồng ngoại.

UV (Ultraviolet): Tử ngoại.

QCD (Quantum chromodynamics): Sắc động lực học lượng tử.

QED (Quantum Electrodynamics): Điện động lực học lượng tử.

EW (Electroweak): Điện yếu.

GSW (Glashow-Salam-Weinberg): tên của mô hình thống nhất tương tác điện yếu.

LSZ (Lehmann-Symanzik-Zimmermann): tên của công thức tính phần tử ma trận-S ở bổ đính bậc cao.

# Chương 1

## Bề rộng phân rã ở mức độ cây

### 1.1 Các quy tắc Feynman

Mô hình chuẩn là lý thuyết mô tả các loại tương tác cơ bản của vũ trụ như tương tác điện từ, tương tác mạnh, tương tác yếu. Để có thể vận dụng được Mô hình chuẩn, cần phải nắm rõ bản chất tương tác của các hiện tượng tán xạ, phân rã. Đồng thời cần phải dựa vào hệ thống các quy tắc Feynman, rồi từ đó đưa ra các biểu diễn toán học như biên độ Feynman ( $\mathcal{M}$ ) để có thể tính toán các đại lượng vật lý quan sát được như tiết diện tán xạ ( $\sigma$ ), bề rộng phân rã ( $\Gamma$ ).

Hiện tượng mà chúng tôi khảo sát là sự phân rã của boson  $Z$  cho ra quark bottom và phản quark bottom có thể được viết như sau

$$Z(k, \lambda) \rightarrow b(p_1, \sigma) + \bar{b}(p_2, \delta). \quad (1.1)$$

Về bản chất, quá trình phân rã trên ở mức độ cây thuộc loại tương tác điện yếu được thống nhất trong mô hình GSW. Tuy nhiên, khi xét đến các bổ đính bậc cao QCD thì sẽ có sự xuất hiện của các hạt gluon, là hạt truyền tương tác hay còn gọi là boson chuẩn của tương tác mạnh giữa các quark, cũng tương tự như photon trong tương tác điện từ.

Để có thể đưa ra được bộ quy tắc Feynman cần thiết để tính toán cho quá trình phân rã trên, cần phải căn cứ vào Lagrangian của hạt tự do và Lagrangian tương tác. Các biểu diễn của đường ngoài như của boson  $Z$  và hai quark, phản-quark thì tương tự như photon và các lepton. Tuy nhiên, tương tác điện yếu, tương tác mạnh khác

với tương tác điện từ của mô hình QED. Do đó, chúng tôi cần phải xác định đỉnh tương tác của hai loại tương tác này.

Đầu tiên là xác định đỉnh tương tác của tương tác điện yếu cần dựa vào thành phần tương tác gauge-fermion trong Lagrangian gauge-fermion có dạng như sau [1]

$$\mathcal{L}_{FG} = J_{em}^\mu A_\mu + J_{NC}^\mu Z_\mu + J_{CC}^\mu W_\mu^+ + J_{CC}^{\mu\dagger} W_\mu^-, \quad (1.2)$$

trong đó, chúng tôi quan tâm đến thành phần dòng trung hòa yếu  $J_{NC}^\mu$  của quark tương tác với boson Z có dạng [1]

$$J_{NC}^\mu = \frac{g_2}{2\cos\theta_W} \sum_{f=l,q} \bar{\psi}_f (v_f \gamma^\mu - a_f \gamma^\mu \gamma_5) \psi_f, \quad (1.3)$$

từ đó rút ra được thành phần đỉnh tương tác theo quy tắc Feynman giữa boson Z với fermion như sau

$$i \frac{g_2}{2\cos\theta_W} (v_f \gamma^\mu - a_f \gamma^\mu \gamma_5), \quad (1.4)$$

với  $g_2$  là hằng số kết cặp chuẩn cho thành phần phi-Abelian SU(2);  $g_1$  cho thành phần Abelian U(1); góc hỗn hợp  $\theta_W$  xác định bởi  $\cos\theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} = \frac{m_W}{m_Z}$ ;  $v_f, a_f$  là các hằng số kết cặp dòng trung hòa xác định bởi

$$\begin{aligned} v_f &= I_3^f - 2Q_f \sin^2\theta_W, \\ a_f &= I_3^f, \end{aligned} \quad (1.5)$$

với  $Q_f, I_3^f$  lần lượt là điện tích và isospin của quark bottom.

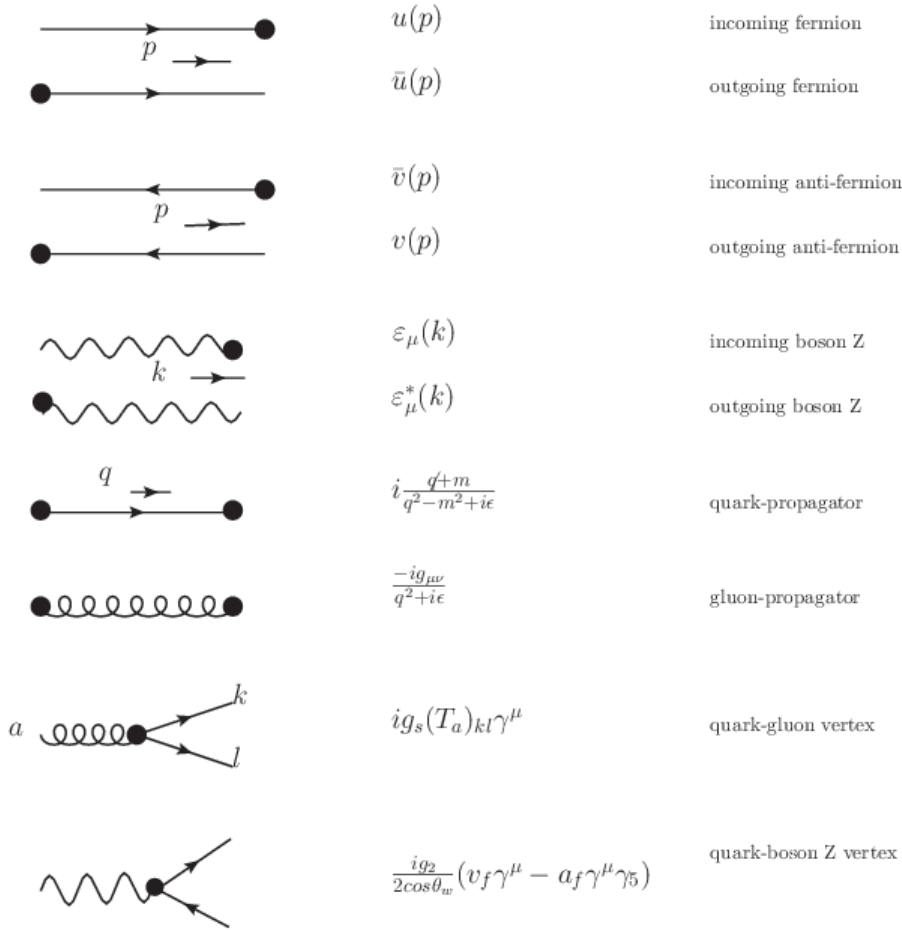
Tương tự như vậy, từ Lagrangian QCD cũng có thể rút ra thành phần đỉnh tương tác mạnh có dạng như sau [1]

$$ig_s T_a \gamma^\mu, \quad (1.6)$$

trong đó  $g_s$  là hằng số kết cặp mạnh,  $T_a$  là tám phần tử sinh của nhóm SU(3).

Tổng kết lại, chúng tôi thu được các quy tắc Feynman cần thiết như trong hình 1.1. Trong giản đồ đỉnh quark-gluon, các chỉ số  $k, l = \overline{1,3}$  là các chỉ số màu. Còn  $u_\sigma(p_1), v_\delta(p_2), \varepsilon_\mu^\lambda(k)$  lần lượt là spinor của quark bottom, phản quark bottom và vector phân cực của boson Z, trong đó  $\sigma, \delta$  có helicity là 1,2;  $\lambda$  có 3 giá trị helicity 1,2,3;  $\mu$  là chỉ số Lorentz.





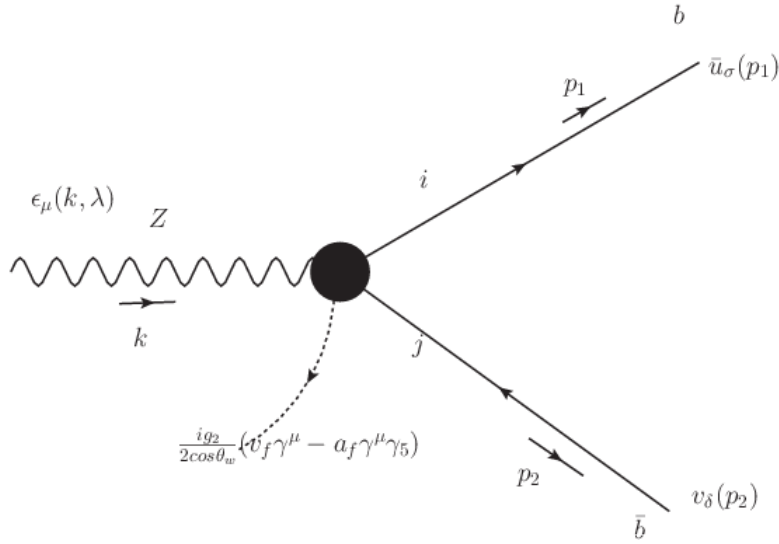
Hình 1.1: Các quy tắc Feynman

## 1.2 Tính bề rộng phân rã mức độ cây

Giải đồ phân rã của boson Z cho ra quark và phản-quark ở mức độ cây được biểu diễn như hình 1.2. Dựa vào các quy tắc Feynman đã được đưa ra, chúng tôi tiến hành viết biên độ Feynman như sau

$$M_0 = \frac{ig_2}{2\cos\theta_W} \bar{u}_\sigma(p_1)(v_b\gamma^\mu - a_b\gamma^\mu\gamma_5)v_\delta(p_2)\varepsilon_\mu^\lambda(k)\delta_{ij}, \quad (1.7)$$

$$\Rightarrow M_0^\dagger = \frac{-ig_2}{2\cos\theta_W} \bar{v}_\delta(p_2)(v_b\gamma^\nu - a_b\gamma^\nu\gamma_5)u_\sigma(p_1)\varepsilon_\nu^{*\lambda}(k)\delta_{ij}. \quad (1.8)$$


 Hình 1.2: Giản đồ  $Z \rightarrow b\bar{b}$  ở mức cây

Vì boson  $Z$  không mang tích màu, để đảm bảo bảo toàn tích màu, mới có thêm thành phần  $\delta_{ij}$  trong biên độ Feynman. Điều này đảm bảo tổng sắc tích của các hạt ở trạng thái cuối bằng 0.

Trong thực nghiệm, trạng thái phân cực đầu của boson  $Z$  là không xác định, còn trạng thái phân cực của các hạt ở trạng thái cuối thì không quan sát được, nên cần lấy trung bình của các trạng thái phân cực đầu và tổng hết các trạng thái phân cực cuối. Khi đó tổng spin sẽ có dạng

$$X_0 = \frac{1}{3} \sum_{\lambda=1,2,3} \sum_{\sigma=1,2} \sum_{\delta=1,2} \sum_{i,j=1,2,3} |M_0|^2. \quad (1.9)$$

Thay dạng tường minh của biên độ Feynman vào tổng phân cực trên, ta được

$$X_0 = \frac{g_2^2}{4 \cos^2 \theta_W} \sum_{\lambda=1,2,3} \varepsilon_\mu^\lambda(k) \varepsilon_\nu^{*\lambda}(k) \sum_{\sigma=1,2} [u_\sigma(p_1)_\eta \bar{u}_\sigma(p_1)_\alpha] (v_b \gamma^\mu - a_b \gamma^\mu \gamma_5)_{\alpha\beta} \times \sum_{\delta=1,2} [v_\delta(p_2)_\beta \bar{v}_\delta(p_2)_\epsilon] (v_b \gamma^\nu - a_b \gamma^\nu \gamma_5)_{\epsilon\eta}. \quad (1.10)$$

Áp dụng các công thức tổng phân cực, tổng spinor như sau [1]

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1,2,3} \varepsilon_{\mu}^{\lambda}(k) \varepsilon_{\nu}^{*\lambda}(k) &= -g_{\mu\nu} + \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{m_Z^2}, \\ \sum_{\sigma=1,2} u_{\sigma}(p_1)_{\eta} \bar{u}_{\sigma}(p_1)_{\alpha} &= (\not{p}_1 + m_b)_{\eta\alpha}, \\ \sum_{\delta=1,2} v_{\delta}(p_2)_{\beta} \bar{v}_{\delta}(p_2)_{\epsilon} &= (\not{p}_2 - m_b)_{\beta\epsilon}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Tổng spin trở thành

$$X_0 = \frac{g_2^2}{4\cos^2\theta_W} \left( -g_{\mu\nu} + \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{m_Z^2} \right) \text{Tr}[(\not{p}_1 + m_b)(v_b\gamma^{\mu} - a_b\gamma^{\mu}\gamma_5)(\not{p}_2 - m_b)(v_b\gamma^{\nu} - a_b\gamma^{\nu}\gamma_5)]. \quad (1.12)$$

Áp dụng các công thức tính Trace cho ma trận  $\gamma$  trong (A.1) vào tổng spin, chúng tôi thu được

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{g_2^2}{\cos^2\theta_W} \left[ (v_b^2 + a_b^2) \left( 2(p_1p_2) + 2\frac{(p_1k)(p_2k)}{m_Z^2} - \frac{(p_1p_2)k^2}{m_Z^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - m_b^2(v_b^2 - a_b^2) \left( -4 + \frac{k^2}{m_Z^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Để đơn giản, ta chọn hệ quy chiếu trong đó boson Z đứng yên, hay xung lượng 3 chiều của hệ bằng 0 ( $\vec{k} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$ ). Khi đó xung lượng k của boson Z sẽ được viết dưới dạng  $k = k^{\mu} = (m_Z, \mathbf{0})$ , xung lượng của quark bottom và phản quark bottom sẽ là  $p_1 = p_1^{\mu} = (E, \mathbf{p})$  và  $p_2 = p_2^{\mu} = (E, -\mathbf{p})$  với  $E = \sqrt{m_b^2 + \mathbf{p}^2}$ . Từ đó dẫn tới các hệ thức sau

$$\begin{cases} k^2 = m_Z^2 \\ p_1p_2 = E^2 + \mathbf{p}^2 = 2E^2 - m_b^2 \\ p_1k = p_2k = m_Z E \end{cases} \quad (1.14)$$

Bên cạnh đó, định luật bảo toàn năng lượng còn dẫn ra một kết quả sau

$$E_Z = E_b + E_{\bar{b}} \Leftrightarrow m_Z = 2E. \quad (1.15)$$

Thay các công thức trên vào biểu thức (1.13), tổng spin trở thành

$$X_0 = \frac{g_2^2}{\cos^2\theta_W} [(v_b^2 + a_b^2)m_Z^2 + m_b^2(2v_b^2 - 4a_b^2)]. \quad (1.16)$$

Công thức tính bề rộng phân rã cho giản đồ cây có dạng như sau [1]

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_0}{d\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2 m_Z} \sqrt{1 - \frac{4m_b^2}{m_Z^2}} X_0 \\ \Rightarrow \Gamma &= \frac{1}{16\pi m_Z} \sqrt{1 - \frac{4m_b^2}{m_Z^2}} \frac{g_2^2}{\cos^2\theta_W} [(v_b^2 + a_b^2)m_Z^2 + m_b^2(2v_b^2 - 4a_b^2)]. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Thay vào biểu thức trên các công thức gồm công thức (1.5) với  $I_3^b = -\frac{1}{2}$ ,  $Q_b = -\frac{1}{3}$ , công thức  $\cos\theta_W = \frac{m_W}{m_Z}$ , và [1]  $\frac{g_2^2}{2\cos\theta_W} = (\sqrt{2}G_F m_Z^2)^{\frac{1}{2}}$ , chúng tôi thu được

$$\Gamma_0 = \frac{G_F m_Z}{\pi\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{4m_b^2}{m_Z^2}} \left[ \left( -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{m_W^2}{m_Z^2} \right) \right)^2 \left( m_b^2 + \frac{m_Z^2}{2} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{m_Z^2}{2} - 2m_b^2 \right) \right]. \quad (1.18)$$

Dựa theo số liệu thực nghiệm lấy từ PDG [2], các giá trị khối lượng và hằng số được lấy với  $m_W = 80.385 \text{ GeV}$ ,  $m_Z = 91.1876 \text{ GeV}$ ,  $m_b = 4.18 \text{ GeV}$ , hằng số Fermi  $G_F = 1.16638 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ . Giá trị cụ thể của bề rộng phân rã ở mức độ cây sau khi được thay các số liệu vào

$$\Gamma_0^{\text{full}} = 0.368593 \text{ GeV}. \quad (1.19)$$

Vì nhận thấy rằng khối lượng của quark bottom khá nhỏ so với khối lượng của boson Z. Do đó, chúng tôi thực hiện xấp xỉ khối lượng  $m_b = 0$ . Khi đó

$$\begin{aligned} \Gamma_0^{\text{approx}} &= \frac{G_F m_Z^3 \sqrt{2}}{4\pi} \left[ \left( -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{m_W^2}{m_Z^2} \right) \right)^2 + \frac{1}{4} \right] \\ &= 0.371727 \text{ GeV}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Tạm thời, chúng tôi sẽ chưa so sánh kết quả tính lý thuyết trên với số liệu thực nghiệm. Sau khi kết quả tính bề rộng phân rã của giản đồ bậc cao được làm rõ, chúng tôi sẽ tiến hành đối chiếu. Vì vậy, trong hai chương tiếp theo sẽ là quá trình chúng tôi đi tìm kết quả của bề rộng phân rã của  $Z \rightarrow b\bar{b}$  ở bổ đính bậc cao QCD.

# Chương 2

## Bề rộng phân rã cho trường hợp gluon ảo

### 2.1 Công thức rút gọn LSZ

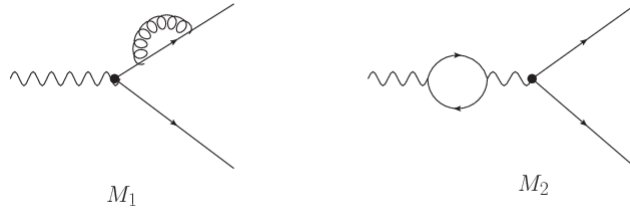
Để có thể tìm được bề rộng phân rã, trước hết phải xác định phần tử ma trận-S. Tuy nhiên, ở các bậc đỉnh bậc cao, việc đi tìm phần tử ma trận-S cần phải được tính thông qua công thức rút gọn LSZ được định nghĩa như sau [3]

$$S_{fi} = \langle p_b p_{\bar{b}} | S | p_Z \rangle = \sqrt{\tilde{Z}_Z} \sqrt{\tilde{Z}_b} \sqrt{\tilde{Z}_{\bar{b}}} M_{Amp}, \quad (2.1)$$

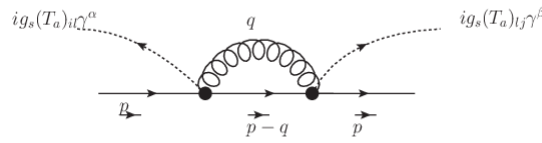
với  $M_{Amp}$  là biên độ Feynman chặt cụt (Amputated Feynman amplitude) rút ra từ các giản đồ không có chứa bổ đỉnh hàm sóng cho đường ngoài như hình 2.1, còn như hình 2.2 là các giản đồ liên kết (connected diagrams) hiển nhiên không thể là giản đồ



Hình 2.1: Giản đồ amputated



Hình 2.2: Giản đồ connected trong đó  $M_1$  là bổ đỉnh tương tác mạnh,  $M_2$  là bổ đỉnh tương tác yếu



Hình 2.3: Giản đồ 1-vòng 2 đỉnh

chặt cụt. Do đó, khi tính biên độ chặt cụt, ví dụ như hình 2.1 ta thu được

$$M_{Amp} = M_0 + M_3. \quad (2.2)$$

Các số hạng  $\tilde{Z}_Z$ ,  $\tilde{Z}_b$ ,  $\tilde{Z}_{\bar{b}}$  là các hằng số chuẩn hóa LSZ, có thể được viết triển khai như sau

$$\begin{cases} \tilde{Z}_Z = 1 + O(\alpha) \\ \tilde{Z}_b = 1 + \alpha_S \tilde{Z}_{b_1} + O(\alpha_S^2) + O(\alpha) \\ \tilde{Z}_{\bar{b}} = 1 + \alpha_S \tilde{Z}_{b_2} + O(\alpha_S^2) + O(\alpha) \end{cases}, \quad (2.3)$$

đồng thời do hàm truyền của quark bottom và quark anti-bottom giống nhau, nên  $\tilde{Z}_b = \tilde{Z}_{\bar{b}}$ . Định nghĩa của số hạng  $\tilde{Z}_f$  như sau [3]

$$\tilde{Z}_f = 1 - \left. \frac{d[g_s^2 \Sigma(\not{p})]}{d\not{p}} \right|_{\not{p}=m}, \quad (2.4)$$

với  $g_s^2 \Sigma(\not{p})$  chính là thành phần năng lượng riêng quark như trong hình 2.3 được biểu diễn trong D-chiều ( $D = 4 - 2\epsilon$ ) dưới dạng

$$g_s^2 \Sigma(\not{p}) = \frac{4}{3} i \tilde{g}_S^2 \mu^{4-D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\gamma^\beta (\not{p} - \not{q} + m_b) \gamma_\beta}{[(p-q)^2 - m_b^2 + i\epsilon'] [q^2 + i\epsilon']}, \quad (2.5)$$

trong đó  $\sum_{a=1}^8 (T_a)^2 = \frac{4}{3}$ ,  $\tilde{g}_S^2 = g_S^2 \mu^{-2\epsilon}$ , khối lượng của gluon  $m_g = 0$ . Đánh giá sơ bộ biểu thức (2.5) khi  $D=4$ , có thể thấy rằng (2.5) khi đó chứa phân kỳ UV. Áp dụng gần đúng  $m_b = 0$  và phương pháp tham số hóa Feynman [4]

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[b + (a-b)z]^2}, \quad (2.6)$$

đồng thời tiến hành đổi biến  $t = q - pz$ , và đặt  $s = p^2 z(z-1)$ , biểu thức (2.5) trở thành

$$g_S^2 \Sigma(\not{p}) = \frac{4}{3} i \tilde{g}_S^2 \mu^{4-D} \int_0^1 dz \int \frac{d^D t}{(2\pi)^D} \frac{(D-2)(\not{t} + \not{p}z - \not{p})}{[t^2 - s + i\epsilon']^2}. \quad (2.7)$$

Vì có dạng tương tự như các tích phân thường gặp, áp dụng các công thức lấy tích phân trong (A.3) và thay  $D = 4 - 2\epsilon$ , ta thu được

$$g_S^2 \Sigma(\not{p}) = \frac{4}{3} \frac{\tilde{g}_S^2}{16\pi^2} \int_0^1 dz (2-2\epsilon)(1-z) \Gamma(\epsilon) \left( \frac{s - i\epsilon'}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon} \not{p}. \quad (2.8)$$

Một cách tổng quát  $g_S^2 \Sigma(\not{p})$  có thể được viết như sau

$$\begin{aligned} g_S^2 \Sigma(\not{p}) &= \not{p} g_S^2 \Sigma_V(p^2) + m_b g_S^2 \Sigma_S(p^2) \\ &= \not{p} g_S^2 \Sigma_V(p^2). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Kết hợp (2.4), (2.8) và (2.9), chúng tôi nhận thấy rằng số hạng  $\tilde{Z}_f$  có thể được viết lại như sau

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_f &= 1 - g_S^2 \Sigma_V(p^2)|_{p^2=0} - \left\{ \not{p} \frac{d[g_S^2 \Sigma_V(p^2)]}{d\not{p}} \right\} \Big|_{\not{p}=m} \\ &= 1 - g_S^2 \Sigma_V(p^2)|_{p^2=0} - \left\{ \not{p} \frac{d[g_S^2 \Sigma_V(p^2)]}{dp^2} \frac{dp^2}{d\not{p}} \right\} \Big|_{\not{p}=m} \quad (p^2 = \not{p}^2) \\ &= 1 - g_S^2 \Sigma_V(p^2)|_{p^2=0} - \lim_{p^2 \rightarrow 0} \left( 2p^2 \frac{d[g_S^2 \Sigma_V(p^2)]}{dp^2} \right), \end{aligned} \quad (2.10)$$

trong đó

$$g_S^2 \Sigma_V(p^2) = \frac{4}{3} \frac{\tilde{g}_S^2}{16\pi^2} \int_0^1 dz (2-2\epsilon)(1-z) \Gamma(\epsilon) \left( \frac{p^2 z(z-1) - i\epsilon'}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon}. \quad (2.11)$$

Xét thành phần thứ ba bên vế phải trong công thức (2.10) có thể được tính ra kết quả tương minh dưới dạng

$$\begin{aligned}
 \lim_{p^2 \rightarrow 0} \left( 2p^2 \frac{d[g_S^2 \Sigma_V(p^2)]}{dp^2} \right) &= \lim_{p^2 \rightarrow 0} \left( 2p^2 \frac{4}{3} \frac{\tilde{g}_S^2}{16\pi^2} \int_0^1 dz (2-2\epsilon)(1-z) \Gamma(\epsilon)(-\epsilon) \right. \\
 &\quad \left. \times \left( \frac{p^2 z(z-1) - i\epsilon'}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon-1} \frac{z(z-1)}{4\pi\mu^2} \right) \\
 &= \lim_{p^2 \rightarrow 0} \left( \frac{-8\epsilon}{3} \frac{\tilde{g}_S^2}{16\pi^2} \int_0^1 dz (2-2\epsilon)(1-z) \Gamma(\epsilon) \right. \\
 &\quad \left. \times \left( \frac{p^2 z(z-1) - i\epsilon'}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon} \right) \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

trong đó  $\epsilon' \rightarrow 0^+$  và  $\epsilon < 0$  (vì ở đây chúng ta đang làm việc với phân kỳ hồng ngoại trong giới hạn  $p^2 \rightarrow 0$ ).

Cuối cùng, công thức rút gọn LSZ có thể được viết gọn lại như sau

$$\begin{aligned}
 S_{fi} &= \tilde{Z}_b M_{Amp} \\
 &= (1 - g_S^2 \Sigma_V(p^2)|_{p^2=0}) M_{Amp}.
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Với công thức tính phần tử ma trận-S đã được xác định như trên, bây giờ ta đã có thể tiến hành tính bề rộng phân rã ứng với trường hợp gluon ảo. Để làm được điều đó, trước hết ta cần phải xác định dạng cụ thể của  $g_S^2 \Sigma_V(p^2)$  và  $M_{Amp}$ .

## 2.2 Vận dụng phương pháp Passarino-Veltman

### 2.2.1 Biên độ Feynman của giản đồ một vòng 3 đỉnh

Phương pháp Passarino-Veltman là phương pháp tách các tích phân tensor Feynman một vòng thành các tích phân vô hướng một vòng có số chân từ một đến bốn. Dạng tổng quát của các tích phân tenor Feynman 1 vòng có thể được viết như sau [5]

$$T_{\mu_1 \dots \mu_F}^N(p_1, p_{N-1}, m_0, \dots, n_{N-1}) = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D q \frac{q_{\mu_1} \dots q_{\mu_F}}{D_0 D_1 \dots D_{N-1}}, \tag{2.14}$$

với các phần tử ở mẫu số có dạng

$$D_0 = q^2 - m_0^2 + i\epsilon, \quad D_i = (q + p_i)^2 - m_i^2 + i\epsilon, \quad i = 1, \dots, N-1, \tag{2.15}$$



$N$  là chỉ số đỉnh trong một vòng.

Từ công thức (2.14) có thể rút ra các tích phân Feynman có 2-đỉnh, 3-đỉnh tương ứng với các giản đồ được xét. Và kể từ những bước tính toán này trở về sau, đều sẽ áp dụng phương pháp gần đúng khối lượng  $m_b = 0$ . Do đó

$$B_0(r^2, 0, 0) = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D q \frac{1}{[q^2 + i\epsilon'][(q+r)^2 + i\epsilon']}, \quad (2.16)$$

$$B^\mu = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D q \frac{q^\mu}{[q^2 + i\epsilon'][(q+r)^2 + i\epsilon']}, \quad (2.17)$$

$$C_0 = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D q \frac{1}{[q^2 + i\epsilon'][(q+r_1)^2 + i\epsilon'][(q+r_2)^2 + i\epsilon']}, \quad (2.18)$$

$$C^\mu = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D q \frac{q^\mu}{[q^2 + i\epsilon'][(q+r_1)^2 + i\epsilon'][(q+r_2)^2 + i\epsilon']}, \quad (2.19)$$

$$C^{\mu\nu} = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D q \frac{q^\mu q^\nu}{[q^2 + i\epsilon'][(q+r_1)^2 + i\epsilon'][(q+r_2)^2 + i\epsilon']}. \quad (2.20)$$

với  $r, r_1, r_2$  là biến bất kì, trong trường hợp chúng tôi đang làm thì  $r_1 = p_1, r_2 = -p_2$ . Trong các tích phân trên, chỉ có  $B_0, C_0$  là hai tích phân vô hướng cơ sở. Còn các tích phân tensor còn lại đều có thể được phân tích ra và biểu diễn theo  $B_0, C_0$ . Để có thể làm được như vậy, trước hết cần phải biết rằng các tích phân tensor có thể được viết dưới dạng như sau [5]

$$\begin{aligned} B^\mu &= r^\mu B_1(r^2, 0, 0) \\ C^\mu &= r_1^\mu C_1 + r_2^\mu C_2 \\ C^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} C_{00} + \sum_{i,j=1}^2 r_i^\mu r_j^\nu C_{ij} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Bằng cách nhân vào  $C^\mu$  lần lượt là  $r_{1\mu}, r_{2\mu}$ ; nhân vào  $C^{\mu\nu}$  lần lượt là  $r_{1\mu}, r_{2\mu}, g_{\mu\nu}$  đồng thời sử dụng điều kiện  $r_1^2 = r_2^2 = m_b^2 = 0$ . Các hệ số tích phân bậc thấp ( $B_1, C_1, C_2, C_{00}$ ) trong tích phân tensor mà chúng tôi quan tâm có thể được phân tích theo tích phân vô hướng cơ sở ( $B_0(r^2, 0, 0)$ ) như sau

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1(r^2, 0, 0) = -\frac{1}{2}B_0(r^2, 0, 0) \\ C_1 = \frac{1}{2r_1 r_2} [B_0(r_1^2, 0, 0) - B_0(k^2, 0, 0)], \quad r_1 = p_1 \\ C_2 = \frac{1}{2r_1 r_2} [B_0(r_2^2, 0, 0) - B_0(k^2, 0, 0)], \quad r_2 = -p_2 \\ (D-2)C_{00} = -B_1(k^2, 0, 0) = \frac{1}{2}B_0(k^2, 0, 0) \end{array} \right. , \quad (2.22)$$

còn kết quả của các tích phân vô hướng cơ sở  $(B_0, C_0)$  với  $r^2 > 0$  thì giống như trong công thức (A.4). Để tính ra được kết quả của  $B_0, C_0$  với  $r^2 \neq 0$  cũng không khó khăn, chỉ cần vận dụng tham số hóa Feynman và hàm Beta (A.5) là có thể làm được. Tuy nhiên, có một trường hợp đặc biệt là trường hợp của  $B_0(r^2, 0, 0)$  với  $r^2 = 0$ , khi đó kết quả của  $B_0$  sẽ là [6]

$$B_0(0, 0, 0) = \frac{1}{\epsilon_{UV}} - \frac{1}{\epsilon_{IR}}. \quad (2.23)$$

Sở dĩ chúng tôi quan tâm đến các hệ số tích phân bậc thấp và các tích phân vô hướng cơ sở là vì khi viết biên độ Feynman của giản đồ một vòng 3 đỉnh sẽ cần đến chúng. Đầu tiên là viết lại  $g_s^2 \Sigma_V(p^2)$  từ công thức (2.5) như sau

$$\begin{aligned} g_s^2 \Sigma(p) &= g_s^2 \Sigma_V(p^2) \not{p} \\ &= \frac{4}{3} i \tilde{g}_s^2 \mu^{4-D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\gamma^\beta (\not{p} - \not{q}) \gamma_\beta}{[(p-q)^2 + i\epsilon'] [q^2 + i\epsilon']} \\ &= \frac{4}{3} \frac{i^2 \tilde{g}_s^2 \pi^2 (2\pi\mu)^{4-D}}{(2\pi)^4 i\pi^2} \int d^D q \frac{(2-D)(\not{p} - \not{q})}{[(p-q)^2 + i\epsilon'] [q^2 + i\epsilon']} \\ &= \frac{4}{3} \frac{i^2 \tilde{g}_s^2 \pi^2}{(2\pi)^4} (2-D) \gamma^\mu [p_\mu B_0(p^2, 0, 0) + p_\mu B_1(p^2, 0, 0)] \\ &= \frac{4}{3} \frac{i^2 \tilde{g}_s^2 \pi^2}{(2\pi)^4} (2-D) [B_0(p^2, 0, 0) + B_1(p^2, 0, 0)] \not{p}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

kết hợp với công thức (2.22), ta thu được

$$g_s^2 \Sigma_V(p^2) = \frac{4}{3} \frac{i^2 \tilde{g}_s^2 \pi^2 (2-D)}{(2\pi)^4 2} B_0(p^2, 0, 0). \quad (2.25)$$

Tiếp theo, ta có thể đi tìm dạng biên độ Feynman của giản đồ một vòng 3 đỉnh như hình 2.4. Dựa theo các quy tắc Feynman, biên độ Feynman tương ứng có dạng như sau

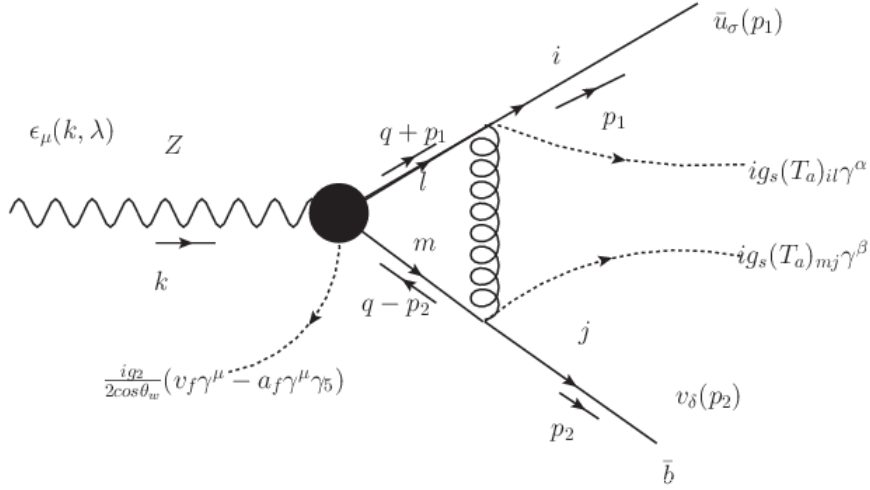
$$M_3 = \frac{i g_2}{2 \cos \theta_W} \bar{u}_\sigma(p_1) g_s^2 \Lambda^\mu(p_1, p_2) v_\delta(p_2) \varepsilon_\mu(k, \lambda) \delta_{ij}, \quad (2.26)$$

trong đó

$$g_s^2 \Lambda^\mu(p_1, p_2) = -\frac{4}{3} \frac{i^2 \tilde{g}_s^2 \pi^2 (2\pi\mu)^{4-D}}{(2\pi)^4 i\pi^2} \int d^D q \frac{\gamma^\alpha (\not{p}_1 + \not{q}) (v_f \gamma^\mu - a_f \gamma^\mu \gamma_5) (-\not{p}_2 + \not{q}) \gamma_\alpha}{[q^2 + i\epsilon'] [(p_1 + q)^2 + i\epsilon'] [(p_2 - q)^2 + i\epsilon']}. \quad (2.27)$$

Đánh giá sơ lược về thành phần  $g_s^2 \Lambda^\mu(p_1, p_2)$ , ta có thể nhận thấy rằng nó có chứa hai loại phân kỳ là phân kỳ UV và phân kỳ IR. Đặt

$$\begin{aligned} r_1 &= p_1, & r_2 &= -p_2, \\ k_1 &= q + \not{p}_1, & k_2 &= q - \not{p}_2. \end{aligned} \quad (2.28)$$



Hình 2.4: Giải đồ một vòng 3 đỉnh

Từ công thức (2.27), xét biểu thức sau đồng thời áp dụng (A.2)

$$\begin{aligned} X &= \gamma^\alpha \not{k}_1 (v_f \gamma^\mu - a_f \gamma^\mu \gamma_5) \not{k}_2 \gamma_\alpha \\ &= (v_f + a_f \gamma_5) [-2 \not{k}_2 \gamma^\mu \not{k}_1 + (4 - D) \not{k}_1 \gamma^\mu \not{k}_2]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Sử dụng công thức phản giao hoán của ma trận  $\gamma$ , ta thu được

$$\not{k}_2 \gamma^\mu \not{k}_1 = 2k_2^\mu \not{k}_1 - 2\gamma^\mu k_1 k_2 + (2k_1^\mu - \not{k}_1 \gamma^\mu) \not{k}_2, \quad (2.30)$$

kết hợp với phương trình Dirac

$$\begin{aligned} \bar{u}_\sigma(p_1) \not{k}_1 &= \bar{u}_\sigma(p_1) (\not{q} + m_b) = \bar{u}_\sigma(p_1) \not{q}, \\ \not{k}_2 v_\delta(p_2) &= (\not{q} + m_b) v_\delta(p_2) = \not{q} v_\delta(p_2), \end{aligned} \quad (2.31)$$

và

$$\not{q} \gamma^\mu \not{q} = 2q^\mu \not{q} - \gamma^\mu q^2. \quad (2.32)$$

Từ đây ta có

$$\begin{aligned} \bar{u}_\sigma(p_1) X v_\delta(p_2) &= -2\bar{u}_\sigma(p_1) (2k_2^\mu \not{q} + 2k_1^\mu \not{q} - 2\gamma^\mu k_1 k_2 - \not{q} \gamma^\mu \not{q}) (v_f - a_f \gamma_5) v_\delta(p_2) \\ &\quad + (4 - D) \bar{u}_\sigma(p_1) (\not{q} \gamma^\mu \not{q}) (v_f - a_f \gamma_5) v_\delta(p_2) \\ &= -2\bar{u}_\sigma(p_1) [2q^\mu \not{q} + 2(p_1 - p_2)^\mu \not{q} - \gamma^\mu q^2 - 2\gamma^\mu (p_1 - p_2) \not{q} + 2\gamma^\mu p_1 p_2] \\ &\quad \times (v_f - a_f \gamma_5) v_\delta(p_2) + (4 - D) \bar{u}_\sigma(p_1) (2q^\mu \not{q} - \gamma^\mu q^2) (v_f - a_f \gamma_5) v_\delta(p_2). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Xét biểu thức sau

$$\begin{aligned} & \bar{u}_\sigma(p_1)g_S^2\Lambda^\mu(p_1, p_2)v_\delta(p_2) \\ &= -\frac{4i^2\tilde{g}_S^2\pi^2}{3(2\pi)^4}\frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2}\int d^Dq\frac{\bar{u}_\sigma(p_1)Xv_\delta(p_2)}{[q^2+i\epsilon'][(q+r_1)^2+i\epsilon'][(q+r_2)^2+i\epsilon']} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Từ đây kết hợp với các công thức từ (2.16) đến (2.21), ta có thể thay

$$\begin{aligned} q^\mu \not{q} &= \gamma_\nu q^\mu q^\nu \rightarrow \gamma_\nu (g^{\mu\nu}C_{00} + \sum_{i,j=1}^2 r_i^\mu r_j^\nu C_{ij}), \\ \not{q} &= \gamma_\nu q^\nu \rightarrow \gamma_\nu (r_1^\mu C_1 + r_2^\mu C_2), \\ q^2 &\rightarrow B_0((r_1 - r_2)^2, 0, 0) = B_0(k^2, 0, 0), \\ 2\gamma^\mu p_1 p_2 &\rightarrow 2\gamma^\mu p_1 p_2 C_0. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Ta thu được

$$\begin{aligned} & \bar{u}_\sigma(p_1)g_S^2\Lambda^\mu(p_1, p_2)v_\delta(p_2) \\ &= -\frac{4i^2\tilde{g}_S^2\pi^2}{3(2\pi)^4}\left\{ -2\bar{u}_\sigma(p_1)[2\gamma^\mu C_{00} + 2\gamma_\nu \sum_{i,j=1}^2 r_i^\mu r_j^\nu C_{ij} + 2(p_1 - p_2)^\mu (\not{r}_1 C_1 + \not{r}_2 C_2) \right. \\ & \quad - \gamma^\mu B_0(k^2, 0, 0) - 2\gamma^\mu (p_1 - p_2)r_1 C_1 - 2\gamma^\mu (p_1 - p_2)r_2 C_2 + 2p_1 p_2 \gamma^\mu C_0] \\ & \quad \times (v_f - a_f \gamma_5)v_\delta(p_2) + (4 - D)\bar{u}_\sigma(p_1)[2\gamma^\mu C_{00} + 2\gamma_\nu \sum_{i,j=1}^2 r_i^\mu r_j^\nu C_{ij} - \gamma^\mu B_0(k^2, 0, 0)] \\ & \quad \left. \times (v_f - a_f \gamma_5)v_\delta(p_2) \right\}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

tiếp tục thay vào biểu thức trên phương trình Dirac như sau

$$\begin{aligned} \bar{u}_\sigma(p_1)\not{r}_1 &= \bar{u}_\sigma(p_1)m_b = 0, \\ \not{r}_2 v_\delta(p_2) &= m_b v_\delta(p_2) = 0, \end{aligned} \quad (2.37)$$

kết quả nhận được là

$$\begin{aligned} & \bar{u}_\sigma(p_1)g_S^2\Lambda^\mu(p_1, p_2)v_\delta(p_2) \\ &= -\frac{4i^2\tilde{g}_S^2\pi^2}{3(2\pi)^4}\bar{u}_\sigma(p_1)\{-2[2C_{00} - B_0(k^2, 0, 0) + 2p_1 p_2(C_1 + C_2) + 2p_1 p_2 C_0] \\ & \quad + (4 - D)[2C_{00} - B_0(k^2, 0, 0)]\}(v_f \gamma^\mu - a_f \gamma^\mu \gamma_5)v_\delta(p_2). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Đặt

$$V_3 = -2[2C_{00} - 2r_1 r_2 (C_1 + C_2 + C_0) - B_0(k^2, 0, 0)] + (4 - D)[2C_{00} - B_0(k^2, 0, 0)]. \quad (2.39)$$

Vậy biên độ Feynman giản đồ một vòng 3-đỉnh trở thành

$$M_3 = \frac{4}{3} \frac{\tilde{g}_S^2 \pi^2}{(2\pi)^4} V_3 M_0. \quad (2.40)$$

Tổng kết về các hệ số tích phân, ta có thể thấy rằng các hệ số mang phân kì UV gồm có :  $B_0(k^2, 0, 0), B_0(0, 0, 0), C_{00}$ . Còn các hệ số mang phân kì IR sẽ là  $C_1, C_2, C_0, B_0(0, 0, 0)$ . Lí do  $C_1, C_2$  chỉ có thành phần IR là do thành phần UV mà ta đã tách ra trong  $B_0(0, 0, 0)$  bị triệt tiêu với UV trong  $B_0(k^2, 0, 0)$ , đồng thời ta có thể thấy rằng  $C_\mu \sim 1/q$  nên sẽ chỉ có phân kì IR. Bên cạnh đó, dạng của các biên độ Feynman cũng đã được xác định, bước tiếp theo cũng chính là đi xác định phần tử ma trận-S và tính bề rộng phân rã.

### 2.2.2 Bề rộng phân rã ứng với gluon ảo

Với dạng của các biên độ Feynman đã xác định, phần tử ma trận-S được viết theo công thức rút gọn LSZ (2.13) như sau

$$S_{fi} = \tilde{Z}_b M_{Amp} = \tilde{Z}_b (M_0 + M_3) = \tilde{Z}_b \left( 1 + \frac{4}{3} \frac{\tilde{g}_S^2 \pi^2}{(2\pi)^4} V_3 \right) M_0, \quad (2.41)$$

với số hạng  $\tilde{Z}_b$  được viết theo công thức (2.10) như sau

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_b &= 1 - g_S^2 \Sigma_V(p^2)|_{p^2=0} - \lim_{p^2 \rightarrow 0} \left( 2p^2 \frac{d[g_S^2 \Sigma_V(p^2)]}{dp^2} \right) \\ &= 1 - g_S^2 \Sigma_V(p^2)|_{p^2=0} \\ &= 1 - \frac{4}{3} \frac{i^2 \tilde{g}_S^2 \pi^2}{(2\pi)^4} \frac{(2-D)}{2} B_0(0, 0, 0) \\ &= 1 + \frac{4}{3} \frac{\tilde{g}_S^2 \pi^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} (\Delta_{UV} - \Delta_{IR}), \quad (\Delta_{UV(IR)} = \frac{2 - D_{UV(IR)}}{\epsilon_{UV(IR)}} = \frac{-2}{\epsilon_{UV(IR)}}). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Trước hết, ta cần phải kiểm tra thành phần UV trong  $S_{fi}$

$$\begin{aligned}
 S_{fi}^{UV} &= \left[ \left( 1 + \frac{4}{3} \frac{\tilde{g}_S^2 \pi^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} (\Delta_{UV} - \Delta_{IR}) \right) \left( 1 + \frac{4}{3} \frac{\tilde{g}_S^2 \pi^2}{(2\pi)^4} V_3 \right) \right]^{UV} M_0 \\
 &= \frac{4}{3} \frac{\tilde{g}_S^2 \pi^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} (\Delta_{UV} + 2V_3^{UV}) M_0 \\
 &= \frac{4}{3} \frac{\tilde{g}_S^2 \pi^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \left[ \Delta_{UV} + 2(2 - D_{UV}) [2C_{00} - B_0(k^2, 0, 0)]^{UV} \right] M_0 \\
 &= \frac{4}{3} \frac{\tilde{g}_S^2 \pi^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \left[ \Delta_{UV} + 2[-B_0(k^2, 0, 0) - (2 - D_{UV})B_0(k^2, 0, 0)]^{UV} \right] M_0 \\
 &= \frac{4}{3} \frac{\tilde{g}_S^2 \pi^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \left[ \frac{-2}{\epsilon_{UV}} - \frac{2}{\epsilon_{UV}} - 2 \frac{-2}{\epsilon_{UV}} \right] M_0 \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Vậy thành phần phân kì UV đã biến mất trong biểu thức phần tử ma trận-S, điều này cho thấy rằng các tính toán bằng phương pháp Passarino Veltman đến giờ vẫn đúng.

Bước tiếp theo, ta xác định tổng phân cực ứng với trường hợp gluon ảo như sau

$$\begin{aligned}
 X_v &= \frac{1}{3} \sum_{\lambda=1,2,3} \sum_{\sigma=1,2} \sum_{\delta=1,2} \sum_{i,j=1,2,3} |S_{fi}|^2 \\
 &= |\tilde{Z}_b|^2 \left| 1 + \frac{4}{3} \frac{\tilde{g}_S^2 \pi^2}{(2\pi)^4} V_3 \right|^2 \frac{1}{3} \sum_{\lambda=1,2,3} \sum_{\sigma=1,2} \sum_{\delta=1,2} \sum_{i,j=1,2,3} |M_0|^2 \\
 &= \left[ 1 + \frac{4}{3} \frac{\tilde{g}_S^2 \pi^2}{(2\pi)^4} (\Delta_{UV} - \Delta_{IR} + 2Re(V_3)) + O(\alpha_s^2) \right] X_{tree},
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

trong đó  $X_{tree}$  là tổng phân cực của giản đồ cây trong chương 1. Tuy nhiên, vì đang làm việc trong không gian D-chiều, nên  $X_{tree}$  với điều kiện  $m_b = 0$  cũng cần được viết lại trong không gian D-chiều như sau

$$X_{tree} = \frac{g_2^2}{\cos^2 \theta_W} (v_f^2 + a_f^2) (1 - \epsilon) m_Z^2. \tag{2.45}$$

Bản thân biểu thức  $V_3$  có thể được viết theo các tích phân cơ sở dưới dạng

$$V_3 = 4[B_0(0, 0, 0) - B_0(k^2, 0, 0)] + B_0(k^2, 0, 0) + 4r_1 r_2 C_0 - 2, \tag{2.46}$$

đồng thời tính toán cụ thể thành phần  $\Delta_{UV} - \Delta_{IR} + 2Re(V_3)$  trong  $X_v$ . Biểu thức

tổng phân cực  $X_v$  trở thành

$$X_v = \frac{g_2^2(1-\epsilon)}{\cos^2\theta_W} (v_b^2 + a_b^2) m_Z^2 \left\{ 1 + \frac{8}{3} \frac{\tilde{g}_S^2 \pi^2}{(2\pi)^4} \left[ -3 \left( \frac{1}{\epsilon_{IR}} - \gamma_E + \ln(4\pi) - \ln \left( \frac{k^2}{\mu^2} \right) + 2 \right) - 2 \left( \frac{k^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon} \frac{\Gamma(1+\epsilon)}{\epsilon_{IR}^2} + \frac{4\pi^2}{3} - 2 + O(\epsilon) \right] + O(\alpha_s^2) \right\}. \quad (2.47)$$

Sau khi đã xác định được biểu thức tổng phân cực, công thức tính bề rộng phân rã cho quá trình  $Z(k) \rightarrow b(p_1) + \bar{b}(p_2)$  trong D-chiều dạng tổng quát như sau [3]

$$d\Gamma_V = \frac{1}{2m_Z} \frac{d^{D-1}p_1}{2p_1^0(2\pi)^{D-1}} \frac{d^{D-1}p_2}{2p_2^0(2\pi)^{D-1}} X_v (2\pi)^D \delta^D(k - p_1 - p_2), \quad (2.48)$$

nhưng để đơn giản cho tính toán thì có thể dùng một cách viết khác như [7]

$$\Gamma_V = \frac{1}{2m_Z} X_v \frac{1}{8\pi} \frac{(4\pi)^\epsilon}{\Gamma(1-\epsilon)} (k^2)^{-\epsilon} \int_0^1 dy y^{-\epsilon} (1-y)^{-\epsilon}. \quad (2.49)$$

Với cách viết đó thì  $\Gamma_V$  có thể được tính toán chi tiết với kết quả là

$$\begin{aligned} \Gamma_V = & \frac{k^2}{2m_Z} \frac{1}{8\pi} \frac{H(\epsilon)}{\Gamma(2-2\epsilon)} \left( \frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{2\epsilon} \frac{g_2^2 \mu^{-2\epsilon}}{\cos^2\theta_W} (v_b^2 + a_b^2) + \frac{k^2}{2m_Z} \frac{1}{\Gamma(2-2\epsilon)} \frac{1}{2(4\pi)^3} \frac{8g_2^2 \tilde{g}_S^2 \mu^{-2\epsilon}}{3\cos^2\theta_W} \\ & \times (v_b^2 + a_b^2) \left( \frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{2\epsilon} \left[ H(\epsilon) \left( 3\gamma_E - 3\ln(4\pi) + 3\ln \left( \frac{k^2}{\mu^2} \right) - 8 + \frac{4\pi^2}{3} \right) \right. \\ & \left. - \frac{2}{\epsilon_{IR}^2} - \frac{1}{\epsilon_{IR}} + 3 - 3\gamma_E - \frac{\pi^2}{3} + 3\ln \left( \frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right) + O(\epsilon) \right], \end{aligned} \quad (2.50)$$

trong đó

$$H(\epsilon) = \left( \frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{-\epsilon} (1-\epsilon)\Gamma(1-\epsilon) = 1 + O(\epsilon). \quad (2.51)$$

Bằng phương pháp rút gọn Passarino Veltman, bề rộng phân rã của các quá trình có gluon ảo đã cho ra một kết quả cụ thể. Tuy nhiên, vì trong biểu thức của nó vẫn còn chứa thành phần phân kỳ IR, điều này có nghĩa là vẫn còn có những giản đồ chưa được xét tới. Do đó, trong chương tiếp theo chúng tôi sẽ trình bày về các bước tính bề rộng phân rã của các giản đồ còn thiếu đó.

# Chương 3

## Bề rộng phân rã trong trường hợp gluon thực

### 3.1 Bề rộng phân rã ứng với gluon thực

Khác với các giản đồ trong trường hợp gluon ảo, các giản đồ ứng với quá trình phân rã có gluon thực tuy không chứa các tích phân Feynman một vòng nhưng do có đường ngoài là gluon nên bề rộng phân rã cũng sẽ tỉ lệ với  $\alpha_S$ . Cách tính bề rộng phân rã ứng với gluon thực cũng gần giống như cách làm ở giản đồ cây, nhưng độ phức tạp cao hơn rất nhiều. Vì các giản đồ này chứa phân kỳ IR nên ta phải tính trong không gian D-chiều. Quá trình phân rã của boson Z có gluon thực có thể được biểu diễn như sau

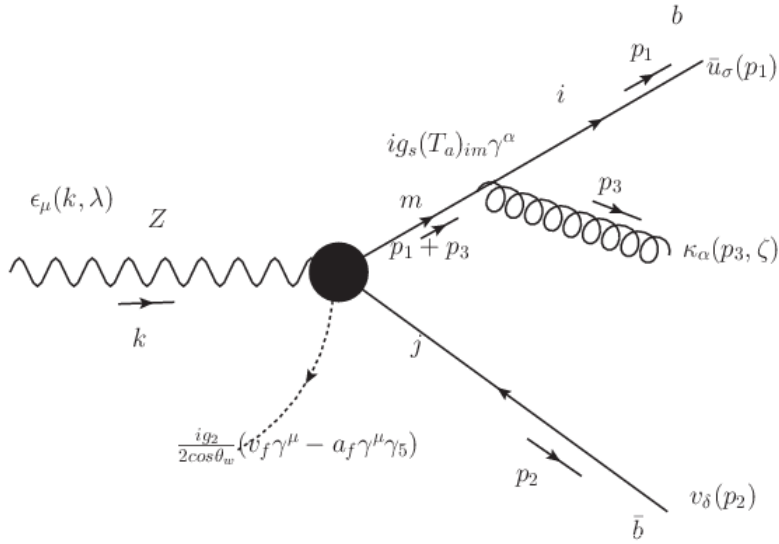
$$Z(k, \lambda) \rightarrow b(p_1, \sigma) + \bar{b}(p_2, \delta) + g(p_3, \zeta). \quad (3.1)$$

Dựa vào quy tắc Feynman, ta có thể viết biên độ Feynman cho hai giản đồ như hình 3.1, hình 3.2 như sau

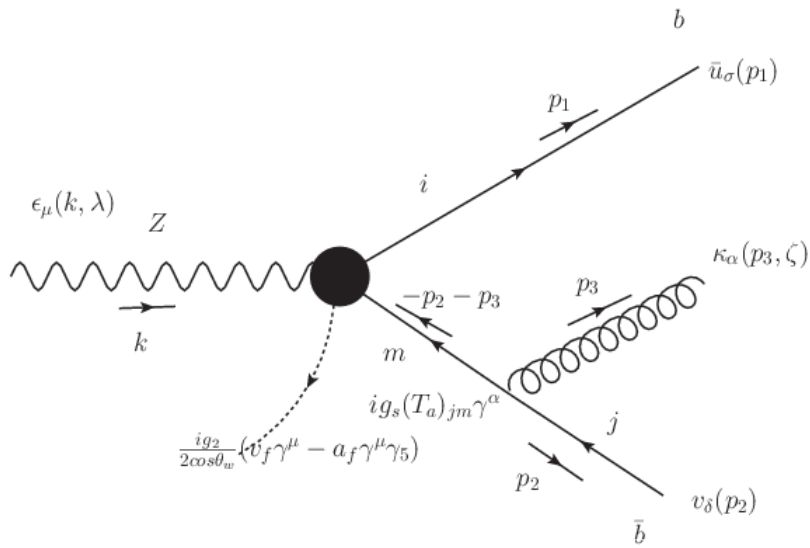
$$M_{r1} = \frac{-ig_2}{2\cos\theta_W} \bar{u}_\sigma(p_1) [g_s(T_a)_{ij}\gamma^\alpha] \frac{\not{p}_1 + \not{p}_3 + m_b}{(p_1 + p_3)^2 - m_b^2} (v_f\gamma^\mu - a_f\gamma^\mu\gamma_5) \times v_\delta(p_2)\varepsilon_\mu(k, \lambda)\kappa_\alpha(p_3, \zeta), \quad (3.2)$$

$$M_{r2} = \frac{-ig_2}{2\cos\theta_W} \bar{u}_\sigma(p_1) (v_f\gamma^\mu - a_f\gamma^\mu\gamma_5) \frac{-\not{p}_2 - \not{p}_3 + m_b}{(p_2 + p_3)^2 - m_b^2} [g_s(T_a)_{ij}\gamma^\alpha] \times v_\delta(p_2)\varepsilon_\mu(k, \lambda)\kappa_\alpha(p_3, \zeta), \quad (3.3)$$





Hình 3.1: Giản đồ gluon thực 1



Hình 3.2: Giản đồ gluon thực 2

trong đó  $k = p_1 + p_2 + p_3$ ,  $\kappa_\alpha(p_3, \zeta)$  là vector phân cực của boson gluon.  $\alpha, \zeta$  lần lượt là chỉ số Lorentz và helicity của gluon,  $\zeta$  có 2 giá trị là 1,2. Liên hợp hermit của hai biên độ Feynman trên là ( $T_a^\dagger = T_a$ )

$$M_{r1}^\dagger = \frac{ig_2}{2\cos\theta_W} \bar{v}_\delta(p_2)(v_f\gamma^\nu - a_f\gamma^\nu\gamma_5) \frac{\not{p}_1 + \not{p}_3 + m_b}{(p_1 + p_3)^2 - m_b^2} \gamma^\beta [g_s(T_a)_{ij}] \times u_\sigma(p_1)\varepsilon_\nu^*(k, \lambda)\kappa_\beta^*(p_3, \zeta), \quad (3.4)$$

$$M_{r2}^\dagger = \frac{ig_2}{2\cos\theta_W} \bar{v}_\delta(p_2)\gamma^\beta [g_s(T_a)_{ij}] \frac{-\not{p}_2 - \not{p}_3 + m_b}{(p_2 + p_3)^2 - m_b^2} (v_f\gamma^\nu - a_f\gamma^\nu\gamma_5) \times u_\sigma(p_1)\varepsilon_\nu^*(k, \lambda)\kappa_\beta^*(p_3, \zeta). \quad (3.5)$$

Tương tự như ở giản đồ cây, ta cần lấy trung bình của các trạng thái phân cực đầu và tổng hết các trạng thái phân cực cuối. Khi đó tổng spin sẽ có dạng

$$\begin{aligned} X_r &= \frac{1}{3} \sum_{\lambda=1,2,3} \sum_{\zeta=1,2} \sum_{a=1}^8 \sum_{\sigma=1,2} \sum_{\delta=1,2} \sum_{i,j=1,2,3} |M_{r1} + M_{r2}|^2 \\ &= \frac{1}{3} \sum_{\lambda=1,2,3} \sum_{\zeta,\sigma,\delta=1,2} \sum_{a=1}^8 \sum_{i,j=1,2,3} (|M_{r1}|^2 + |M_{r2}|^2 + M_{r1}M_{r2}^\dagger + M_{r2}M_{r1}^\dagger) \\ &= A_1 + A_2 + A_3 + A_3^\dagger. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Đầu tiên xem xét  $A_1$ , khai triển ra dạng của  $M_{r1}$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{3} \frac{g_2^2}{4\cos^2\theta_W} g_s^2 \sum_a (T_a)^2 \sum_{i,j} \delta_{ij}^2 \left\{ \sum_\sigma [u_\sigma(p_1)_i \bar{u}_\sigma(p_1)_b] \gamma_{bc}^\alpha \left( \frac{\not{p}_1 + \not{p}_3 + m_b}{(p_1 + p_3)^2 - m_b^2} \right)_{cd} \right. \\ &\quad \times (v_f\gamma^\mu - a_f\gamma^\mu\gamma_5)_{de} \sum_\delta [v_\delta(p_2)_e \bar{v}_\delta(p_2)_f] (v_f\gamma^\nu - a_f\gamma^\nu\gamma_5)_{fg} \\ &\quad \left. \times \left( \frac{\not{p}_1 + \not{p}_3 + m_b}{(p_1 + p_3)^2 - m_b^2} \right)_{gh} \gamma_{hi}^\beta \right\} \sum_\lambda [\varepsilon_\mu(k, \lambda)\varepsilon_\nu^*(k, \lambda)] \sum_\zeta [\kappa_\alpha(p_3, \zeta)\kappa_\beta^*(p_3, \zeta)], \end{aligned} \quad (3.7)$$

áp dụng công thức (1.11) kết hợp với công thức sau [8]

$$\sum_{\zeta=1,2} \kappa_\alpha(p_3, \zeta)\kappa_\beta^*(p_3, \zeta) = -g_{\alpha\beta}, \quad (3.8)$$

biểu thức  $A_1$  trở thành

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{g_2^2 g_s^2}{3\cos^2\theta_W} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m_Z^2} \right) \frac{1}{[(p_1 + p_3)^2 - m_b^2]^2} \text{Tr} \left\{ (\not{p}_1 + \not{p}_3 + m_b) \gamma_\alpha (\not{p}_1 + m_b) \gamma^\alpha \right. \\ &\quad \left. \times (\not{p}_1 + \not{p}_3 + m_b) (v_f\gamma^\mu - a_f\gamma^\mu\gamma_5) (\not{p}_2 - m_b) (v_f\gamma^\nu - a_f\gamma^\nu\gamma_5) \right\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Áp dụng xấp xỉ khối lượng quark bottom  $m_b = 0$  và định thức rút gọn ma trận  $\gamma$  (A.2), ta thu được

$$A_1 = \frac{(D-2)g_2^2 g_s^2}{3 \cos^2 \theta_W} \frac{1}{[(p_1 + p_3)^2]^2} \text{Tr} \left\{ [(p_1^2 - p_3^2) \not{p}_1 + (2p_1^2 + 2p_3 p_1) \not{p}_3] \right. \\ \left. \times [(v_f^2 + a_f^2) \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu - 2v_f a_f \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu \gamma_5] \left( -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_Z^2} \right) \right\}. \quad (3.10)$$

Tiếp tục sử dụng các công thức lấy Trace (A.1) của ma trận  $\gamma^\mu$  để giản lược, cuối cùng kết quả nhận được của  $A_1$  là

$$A_1 = \frac{4(D-2)g_2^2 g_s^2}{3 \cos^2 \theta_W} \frac{(v_f^2 + a_f^2)}{[(p_1 + p_3)^2]^2} \left[ 2p_3 p_1 ((D-2)(p_3 p_2) + \frac{2(k p_2)(p_3 k) - (p_3 p_2)k^2}{m_Z^2}) \right]. \quad (3.11)$$

Tương tự như vậy, kết quả của  $A_2$  và  $A_3$  lần lượt là

$$A_2 = \frac{4(D-2)g_2^2 g_s^2}{3 \cos^2 \theta_W} \frac{(v_f^2 + a_f^2)}{[(p_2 + p_3)^2]^2} \left[ 2p_3 p_2 ((D-2)p_3 p_1 + \frac{2(k p_1)(p_3 k) - (p_3 p_1)k^2}{m_Z^2}) \right], \quad (3.12)$$

$$A_3 = \frac{-8g_2^2 g_s^2}{3 \cos^2 \theta_W} \frac{(v_f^2 + a_f^2)}{[(p_1 + p_3)^2][(p_2 + p_3)^2]} \left\{ -4(p_1 p_2)[(k - p_1)(k - p_2)] \right. \\ \left. - (D-4)[k^2(p_1 p_2)] + \frac{1}{m_Z^2}(k^2 - 2p_1 k)(k^2 - 2k p_2)(p_1 p_2) \right\} \\ + \frac{4(4-D)g_2^2 g_s^2}{3 \cos^2 \theta_W} \frac{(v_f^2 + a_f^2)}{[(p_1 + p_3)^2][(p_2 + p_3)^2]} \left\{ -4(p_1 p_3)(p_3 p_2) \right. \\ \left. - 2(D-4)(p_3 p_1)(p_3 p_2) + \frac{4}{m_Z^2}(p_1 p_3)(p_1 p_2)(p_3 p_2) \right\}, \quad (3.13)$$

$$\Rightarrow A_3^\dagger = A_3^* = A_3. \quad (3.14)$$

Vì đã sử dụng xấp xỉ khối lượng quark bottom bằng 0 nên ta có  $p_1^2 = p_2^2 = m_b^2 = 0$ . Đồng thời để đơn giản, ta chọn hệ quy chiếu trong đó boson Z đứng yên, hay xung lượng 3 chiều của hệ bằng 0 ( $\vec{k} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$ ). Khi đó xung lượng  $k$  của boson Z sẽ được viết dưới dạng  $k = k^\mu = (m_Z, \mathbf{0})$ , xung lượng của quark bottom, phản quark bottom và gluon sẽ là  $p_1 = p_1^\mu = (E_1, \mathbf{p}_1)$ ,  $p_2 = p_2^\mu = (E_2, \mathbf{p}_2)$  và  $p_3 = p_3^\mu = (E_3, \mathbf{p}_3)$

với  $E_1 = \sqrt{\mathbf{p}_1^2} = |\mathbf{p}_1|$ ,  $E_2 = |\mathbf{p}_2|$ ,  $E_3 = |\mathbf{p}_3|$ . Từ đó dẫn tới các hệ thức sau

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 p_2 = E_1 E_2 - \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2, \quad p_2 p_3 = E_2 E_3 - \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3, \quad p_1 p_3 = E_1 E_3 - \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_3, \\ kp_1 = m_Z E_1, \quad kp_2 = m_Z E_2, \quad kp_3 = m_Z E_3, \\ k^2 = m_Z^2, \quad (p_1 + p_3)^2 = p_1^2 + 2p_1 p_3 + p_3^2 = 2p_1 p_3 \\ p_3^2 = 0, \quad (p_2 + p_3)^2 = p_2^2 + 2p_2 p_3 + p_3^2 = 2p_2 p_3 \\ p_1 p_3 = \frac{1}{2}(m_Z^2 - 2kp_2), \quad p_1 p_2 = \frac{1}{2}(m_Z^2 - 2kp_3), \quad p_2 p_3 = \frac{1}{2}(m_Z^2 - 2kp_1) \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Các thành phần  $A_1, A_2, A_3$  trở thành

$$A_1 = \frac{4(D-2)g_2^2 g_s^2 (v_f^2 + a_f^2)}{3 \cos^2 \theta_W} \left[ (D-3)p_3 p_2 + \frac{2(kp_2)(p_3 k)}{m_Z^2} \right], \quad (3.16)$$

$$A_2 = \frac{4(D-2)g_2^2 g_s^2 (v_f^2 + a_f^2)}{3 \cos^2 \theta_W} \left[ (D-3)p_3 p_1 + \frac{2(kp_1)(p_3 k)}{m_Z^2} \right], \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} A_3 = & \frac{-8g_2^2 g_s^2 (v_f^2 + a_f^2)}{3 \cos^2 \theta_W} \frac{(v_f^2 + a_f^2)}{[2p_1 p_3][2p_2 p_3]} \left\{ -4(p_1 p_2)[(k-p_1)(k-p_2)] - (D-4)[k^2(p_1 p_2)] \right. \\ & \left. + \frac{1}{m_Z^2} (k^2 - 2p_1 k)(k^2 - 2kp_2)(p_1 p_2) \right\} + \frac{4(4-D)g_2^2 g_s^2 (v_f^2 + a_f^2)}{3 \cos^2 \theta_W} \frac{(v_f^2 + a_f^2)}{[2p_1 p_3][2p_2 p_3]} \\ & \times \left\{ -4(p_1 p_3)(p_3 p_2) - 2(D-4)(p_3 p_1)(p_3 p_2) + \frac{4}{m_Z^2} (p_1 p_3)(p_1 p_2)(p_3 p_2) \right\}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Công thức tính bề rộng phân rã cho quá trình  $Z \rightarrow b\bar{b}g$  trong D-chiều ( $D = 4 - 2\epsilon$ ) dạng tổng quát như sau [3]

$$d\Gamma_R = \frac{1}{2m_Z} \frac{d^{D-1} p_1}{2p_1^0 (2\pi)^{D-1}} \frac{d^{D-1} p_2}{2p_2^0 (2\pi)^{D-1}} \frac{d^{D-1} p_3}{2p_3^0 (2\pi)^{D-1}} X_r (2\pi)^D \delta^D(k - p_1 - p_2 - p_3). \quad (3.19)$$

Ngoài ra, còn có một cách viết khác giúp cho việc tính toán được đơn giản hơn [9]

$$d\Gamma_R = \frac{1}{2m_Z} \frac{1}{\Gamma(2-2\epsilon)} \frac{(8\pi)^{2\epsilon}}{2(4\pi)^3} (k^2)^{1-2\epsilon} (1 - \cos^2 \beta)^{-\epsilon} (x_1)^{-2\epsilon} (x_2)^{-2\epsilon} X_r dx_1 dx_2, \quad (3.20)$$

trong đó cận lấy tích phân của  $x_1$  từ  $0 \rightarrow 1$ , của  $x_2$  là từ  $1 - x_1 \rightarrow 1$ , còn các biến  $x_1, x_2$  được định nghĩa như sau

$$\cos \beta = \frac{x_3^2 - x_1^2 - x_2^2}{2x_1 x_2}, \quad x_1 = \frac{2p_1 k}{k^2}, \quad x_2 = \frac{2p_2 k}{k^2}, \quad x_3 = \frac{2p_3 k}{k^2} = 2 - x_1 - x_2. \quad (3.21)$$

Áp dụng sự biến đổi trên cho các biểu thức tích của xung lượng trong công thức (3.15), ta thu được

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2p_1 p_3}{k^2} = \frac{1}{k^2}(m_Z^2 - 2kp_2) = 1 - x_2 \\ \frac{2p_1 p_2}{k^2} = \frac{1}{k^2}(m_Z^2 - 2kp_3) = 1 - x_3 = x_1 + x_2 - 1 \\ \frac{2p_2 p_3}{k^2} = \frac{1}{k^2}(m_Z^2 - 2kp_1) = 1 - x_1 \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Bằng cách phân phối số hạng  $k^2$  thích hợp, các biểu thức  $A_1, A_2, A_3$  có thể được viết lại theo biến  $x_1, x_2$  như sau

$$A_1 = \frac{4g_2^2 g_s^2}{3 \cos^2 \theta_W} \frac{(v_f^2 + a_f^2)(1 - \epsilon)}{(1 - x_2)(1 - x_1)} [(1 - 2\epsilon)(1 - x_1)^2 + x_2(1 - x_1)(2 - x_1 - x_2)], \quad (3.23)$$

$$A_2 = \frac{4g_2^2 g_s^2}{3 \cos^2 \theta_W} \frac{(v_f^2 + a_f^2)(1 - \epsilon)}{(1 - x_1)(1 - x_2)} [(1 - 2\epsilon)(1 - x_2)^2 + x_1(1 - x_2)(2 - x_1 - x_2)], \quad (3.24)$$

$$A_3 = \frac{2g_2^2 g_s^2}{3 \cos^2 \theta_W} \frac{(v_f^2 + a_f^2)(1 - \epsilon)}{(1 - x_2)(1 - x_1)} \{4[x_1 + x_2 - 1 - \epsilon(1 - x_2)(1 - x_1)] - 2(x_1 + x_2 - 1)(1 - x_2)(1 - x_1)\}. \quad (3.25)$$

Biểu thức tổng spin của các giản đồ ứng với gluon thực  $X_r$  trở thành

$$\begin{aligned} X_r &= A_1 + A_2 + 2A_3 \\ &= \frac{8g_2^2 g_s^2}{3 \cos^2 \theta_W} \frac{(v_f^2 + a_f^2)}{(1 - x_2)(1 - x_1)} \{x_1^2 + x_2^2 \\ &\quad - 2\epsilon[x_1^2 + x_2^2 + x_3 - 1 + (1 - x_1)(1 - x_2)] + \epsilon^2 x_3^2\}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Tiến hành xem xét biểu thức

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{(2 - x_1 - x_2)^2 - x_1^2 - x_2^2}{2x_1 x_2} \\ &= \frac{4 + x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 4x_2 + 2x_1 x_2 - x_1^2 - x_2^2}{2x_1 x_2} \\ &= \frac{4(1 - x_1)(1 - x_2) - 2x_1 x_2}{2x_1 x_2} = \frac{2(1 - x_1)(1 - x_2)}{x_1 x_2} - 1 \\ \Rightarrow \cos^2 \beta &= \frac{4(1 - x_1)^2 (1 - x_2)^2}{x_1^2 x_2^2} - \frac{4(1 - x_1)(1 - x_2)}{x_1 x_2} + 1 \\ \Rightarrow (1 - \cos^2 \beta)^{-\epsilon} &= \frac{4^{-\epsilon} (1 - x_1)^{-\epsilon} (1 - x_2)^{-\epsilon}}{x_1^{-2\epsilon} x_2^{-2\epsilon}} [x_1 + x_2 - 1]^{-\epsilon}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Bây giờ chúng tôi đã có thể đi tính bề rộng phân rã cho qua trình phân rã của boson Z cho ra  $b + \bar{b} + g$ . Thay biểu thức (3.26) vào công thức (3.20) và đặt

$$C_R = \frac{k^2}{2m_Z} \frac{1}{\Gamma(2-2\epsilon)} \frac{(4\pi)^{2\epsilon}}{2(4\pi)^3} \frac{8g_2^2 \tilde{g}_s^2 \mu^{-2\epsilon}}{3 \cos^2 \theta_W} (v_f^2 + a_f^2) \left( \frac{\mu^2}{k^2} \right)^{2\epsilon},$$

ta nhận được ( $\tilde{g}_s^2 = g_s^2 \mu^{-2\epsilon}$ )

$$\begin{aligned} d\Gamma_R &= \frac{k^2}{2m_Z} \frac{1}{\Gamma(2-2\epsilon)} \frac{(8\pi)^{2\epsilon}}{2(4\pi)^3} \frac{8g_2^2 g_s^2 (\mu^2)^{-2\epsilon}}{3 \cos^2 \theta_W} 2^{-2\epsilon} (v_f^2 + a_f^2) (1-x_1)^{-\epsilon} (1-x_2)^{-\epsilon} \\ &\quad \times [x_1 + x_2 - 1]^{-\epsilon} \left( \frac{\mu^2}{k^2} \right)^{2\epsilon} \left\{ \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_2)(1-x_1)} - 2\epsilon \left[ \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3 - 1}{(1-x_2)(1-x_1)} + 1 \right] \right. \\ &\quad \left. + \epsilon^2 \frac{(2-x_1-x_2)^2}{(1-x_2)(1-x_1)} \right\} dx_1 dx_2 \\ &= C_R dx_1 dx_2 (1-x_1)^{-\epsilon} (1-x_2)^{-\epsilon} [x_1 + x_2 - 1]^{-\epsilon} \\ &\quad \times \left\{ \frac{(1-\epsilon)^2 (x_1^2 + x_2^2)}{(1-x_2)(1-x_1)} + (\epsilon - \epsilon^2) \frac{2x_1 x_2}{(1-x_2)(1-x_1)} - 4\epsilon(1-\epsilon) \right\}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Lấy tích phân hai vế

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Gamma_R &= C_R (1-\epsilon) \int_0^1 dx_1 \int_{1-x_1}^1 dx_2 (1-x_1)^{-\epsilon} (1-x_2)^{-\epsilon} [x_1 + x_2 - 1]^{-\epsilon} \\ &\quad \times \left\{ (1-\epsilon) \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_2)(1-x_1)} + 2\epsilon \frac{x_1}{(1-x_2)(1-x_1)} - 2\epsilon \frac{x_1}{(1-x_1)} - 4\epsilon \right\}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Dựa theo [9] chúng tôi thực hiện đổi biến số, thay  $x_2 = 1 - x_1(1-t)$  vào biểu thức trên với Jacobian là  $J = x_1$ , việc làm này giúp tách tích phân hai lớp thành tích của hai tích phân một lớp. Khi thay  $\epsilon \rightarrow 0$  thì tích phân theo hằng số ( $4\epsilon$ ) trong biểu thức trên cho ra số hữu hạn và nhân với  $4\epsilon \rightarrow 0$  sẽ cho ra 0 nên ta có thể bỏ qua số hạng đó. Kết quả của bề rộng phân rã sẽ là

$$\begin{aligned} \Gamma_R &= C_R (1-\epsilon) \int_0^1 dx_1 (1-x_1)^{-\epsilon} x_1^{1-2\epsilon} \int_0^1 dt (1-t)^{-\epsilon} t^{-\epsilon} \\ &\quad \times \left\{ (1-\epsilon) \frac{x_1^2 + [1-x_1(1-t)]^2}{x_1(1-t)(1-x_1)} + 2\epsilon \frac{1}{(1-t)(1-x_1)} - 2\epsilon \frac{x_1}{(1-x_1)} \right\} \\ &= B_1 + B_2 + B_3. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Để có thể tính được ba số hạng  $B_1, B_2, B_3$  trong công thức trên. Cần phải sử dụng

công thức về hàm Beta, Gamma (A.5). Các số hạng đó có kết quả lần lượt là

$$B_1 = C_R(1 - \epsilon)^2 \left\{ -\frac{(1 - 2\epsilon)(2 - 2\epsilon)}{3\epsilon(1 - 3\epsilon)(2 - 3\epsilon)} - \frac{1}{3\epsilon} - \frac{2}{3(1 - 3\epsilon)} + \frac{(1 - \epsilon)}{3(1 - 3\epsilon)(2 - 3\epsilon)} \right\} \\ \times \frac{\Gamma(-\epsilon)}{\Gamma(-3\epsilon)} \Gamma(-\epsilon) \Gamma(1 - \epsilon), \quad (3.31)$$

$$B_2 = -\frac{2}{3} C_R(1 - \epsilon) \frac{(1 - 2\epsilon)}{(1 - 3\epsilon)} \frac{\Gamma(-\epsilon)}{\Gamma(-3\epsilon)} \Gamma(1 - \epsilon) \Gamma(-\epsilon), \quad (3.32)$$

$$B_3 = -\frac{2\epsilon(2 - 2\epsilon)}{3(1 - 3\epsilon)(2 - 3\epsilon)} C_R(1 - \epsilon) \frac{\Gamma(-\epsilon)}{\Gamma(-3\epsilon)} \Gamma(-\epsilon) \Gamma(1 - \epsilon). \quad (3.33)$$

Khai triển chuỗi Taylor cho biểu thức gồm các hàm Gamma sau

$$\frac{\Gamma(-\epsilon)}{\Gamma(-3\epsilon)} \Gamma(-\epsilon) \Gamma(1 - \epsilon) = -\epsilon \frac{\Gamma(-\epsilon)}{\Gamma(-3\epsilon)} [\Gamma(-\epsilon)]^2 \\ = -\frac{3}{\epsilon} + \frac{3\pi^2\epsilon}{2} + O(\epsilon^2). \quad (3.34)$$

Sau khi đã xác định các hệ số  $B_1, B_2, B_3$ . Kết quả cuối cùng của bề rộng phân rã

$$\Gamma_R = B_1 + B_2 + B_3 \\ = C_R \frac{2(\epsilon - 1)(2 - 6\epsilon + 5\epsilon^2)}{3\epsilon(3\epsilon - 2)(3\epsilon - 1)} \frac{\Gamma(-\epsilon)}{\Gamma(-3\epsilon)} \Gamma(-\epsilon) \Gamma(1 - \epsilon) \\ = C_R \left( -\frac{2}{3\epsilon} - \frac{1}{3} - \frac{13}{6}\epsilon + O(\epsilon^2) \right) \left( -\frac{3}{\epsilon} + \frac{3\pi^2\epsilon}{2} + O(\epsilon^2) \right) \\ = C_R \left( \frac{2}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} + \frac{13}{2} - \pi^2 + O(\epsilon) \right) \\ = \frac{k^2}{2m_Z} \frac{1}{\Gamma(2 - 2\epsilon)} \frac{1}{2(4\pi)^3} \frac{8g_2^2 \tilde{g}_s^2 \mu^{-2\epsilon}}{3 \cos^2 \theta_W} (v_f^2 + a_f^2) \left( \frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{2\epsilon} \left( \frac{2}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} + \frac{13}{2} - \pi^2 + O(\epsilon) \right). \quad (3.35)$$

Nhìn từ kết quả của bề rộng phân rã, có thể thấy rõ thành phần phân kì IR,  $\Gamma_R \rightarrow \infty$  khi  $\epsilon \rightarrow 0$ .

## 3.2 Tổng đóng góp của hai trường hợp gluon thực và ảo

Kết quả bề rộng phân rã của cả hai trường hợp đều đã được tính toán cụ thể, việc còn lại duy nhất là lấy tổng của cả hai. Ta có

$$\begin{aligned}
 \Gamma_V + \Gamma_R &= \frac{k^2}{2m_Z} \frac{1}{8\pi} \frac{H(\epsilon)}{\Gamma(2-2\epsilon)} \left( \frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{2\epsilon} \frac{g_2^2 \mu^{-2\epsilon}}{\cos^2 \theta_W} (v_f^2 + a_f^2) + \frac{k^2}{2m_Z} \frac{1}{\Gamma(2-2\epsilon)} \frac{1}{2(4\pi)^3} \\
 &\quad \times \frac{8g_2^2 \tilde{g}_s^2 \mu^{-2\epsilon}}{3\cos^2 \theta_W} (v_f^2 + a_f^2) \left( \frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{2\epsilon} \left[ H(\epsilon) \left( 3\gamma_E - 3\ln(4\pi) + 3\ln \left( \frac{k^2}{\mu^2} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 8 + \frac{4\pi^2}{3} \right) - \frac{2}{\epsilon_{IR}^2} - \frac{1}{\epsilon_{IR}} + 3 - 3\gamma_E - \frac{\pi^2}{3} + 3\ln \left( \frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right) + O(\epsilon) \right] \\
 &\quad + \frac{k^2}{2m_Z} \frac{1}{\Gamma(2-2\epsilon)} \frac{1}{2(4\pi)^3} \frac{8g_2^2 \tilde{g}_s^2 \mu^{-2\epsilon}}{3\cos^2 \theta_W} (v_f^2 + a_f^2) \left( \frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{2\epsilon} \\
 &\quad \times \left( \frac{2}{\epsilon_{IR}^2} + \frac{1}{\epsilon_{IR}} + \frac{13}{2} - \pi^2 + O(\epsilon) \right). \tag{3.36}
 \end{aligned}$$

Thành phần phân kỳ hồng ngoại của tổng trên có dạng như sau

$$\begin{aligned}
 (\Gamma_V + \Gamma_R)_{IR} &= \frac{k^2}{2m_Z} \frac{1}{\Gamma(2-2\epsilon)} \frac{1}{2(4\pi)^3} \frac{8g_2^2 \tilde{g}_s^2 \mu^{-2\epsilon}}{3\cos^2 \theta_W} (v_f^2 + a_f^2) \left( \frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{2\epsilon} \\
 &\quad \times \left( \frac{2}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} - \frac{2}{\epsilon^2} - \frac{1}{\epsilon} \right) \\
 &= 0. \tag{3.37}
 \end{aligned}$$

Cuối cùng thì thành phần phân kỳ IR duy nhất còn lại cũng đã biến mất. Vậy bề rộng phân rã tổng cộng trở thành

$$\begin{aligned}
 \Gamma_V + \Gamma_R &= \frac{k^2}{2m_Z} \frac{1}{8\pi} \frac{H(\epsilon)}{\Gamma(2-2\epsilon)} \left( \frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{2\epsilon} \frac{g_2^2 \mu^{-2\epsilon}}{\cos^2 \theta_W} (v_f^2 + a_f^2) + \frac{k^2}{2m_Z} \frac{1}{\Gamma(2-2\epsilon)} \frac{1}{2(4\pi)^3} \\
 &\quad \times \frac{8g_2^2 \tilde{g}_s^2 \mu^{-2\epsilon}}{3\cos^2 \theta_W} (v_f^2 + a_f^2) \left( \frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{2\epsilon} \left[ \left( 3\gamma_E - 3\ln(4\pi) + 3\ln \left( \frac{k^2}{\mu^2} \right) - 8 + \frac{4\pi^2}{3} \right) \right. \\
 &\quad \left. + 3 - 3\gamma_E - \frac{\pi^2}{3} + 3\ln \left( \frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right) + \frac{13}{2} - \pi^2 + O(\epsilon) \right] \\
 &= \frac{k^2}{2m_Z} \frac{1}{8\pi} \frac{H(\epsilon)}{\Gamma(2-2\epsilon)} \left( \frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{2\epsilon} \frac{g_2^2 \mu^{-2\epsilon}}{\cos^2 \theta_W} (v_f^2 + a_f^2) \\
 &\quad + \frac{3}{2} \frac{k^2}{2m_Z} \frac{1}{\Gamma(2-2\epsilon)} \frac{1}{2(4\pi)^3} \frac{8g_2^2 \tilde{g}_s^2 \mu^{-2\epsilon}}{3\cos^2 \theta_W} (v_f^2 + a_f^2) \left( \frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{2\epsilon} + O(\epsilon)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \Gamma_V + \Gamma_R &= \frac{k^2}{2m_Z} \frac{1}{8\pi} \frac{g_2^2}{\cos^2\theta_W} (v_f^2 + a_f^2) + \frac{3}{2} \frac{k^2}{2m_Z} \frac{1}{2(4\pi)^3} \frac{8g_2^2g_s^2}{3\cos^2\theta_W} (v_f^2 + a_f^2) + O(\epsilon) \\
 &= \frac{1}{8\pi} \frac{k^2}{2m_Z} \frac{g_2^2}{\cos^2\theta_W} (v_f^2 + a_f^2) \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi}\right). \tag{3.38}
 \end{aligned}$$

Thay các biểu thức sau

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{g_2}{\cos\theta_W} = 2(\sqrt{2}G_F m_Z^2)^{\frac{1}{2}} \\ v_b = I_3^b - 2Q_b \sin^2\theta_W = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{m_W^2}{m_Z^2}\right), \\ a_b = I_3^b = -\frac{1}{2} \end{array} \right. , \tag{3.39}$$

vào biểu thức tính  $\Gamma_{\text{QCD}}$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\text{QCD}}^{\text{approx}} &= \Gamma_V + \Gamma_R \\
 &= \frac{1}{8\pi} \frac{m_Z}{2} 4\sqrt{2}G_F m_Z^2 \left[ \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{m_W^2}{m_Z^2}\right)\right)^2 + \frac{1}{4} \right] \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi}\right) \\
 &= \frac{\sqrt{2}G_F m_Z^3}{4\pi} \left[ \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{m_W^2}{m_Z^2}\right)\right)^2 + \frac{1}{4} \right] \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi}\right) \\
 &= \Gamma_0^{\text{approx}} \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi}\right), \tag{3.40}
 \end{aligned}$$

dựa theo số liệu thực nghiệm từ PDG [2] như đã viết ở mục (1.2) và hằng số tương tác mạnh  $\alpha_S(m_Z) = 0.1185$  [2], ta thu được

$$\Gamma_{\text{QCD}}^{\text{approx}} = 0.385748 \text{ GeV}. \tag{3.41}$$

Kết quả thực nghiệm lấy từ PDG [2] như sau

$$\Gamma_{\text{exp}} = 0.3773 \pm 0.0016 \text{ GeV}. \tag{3.42}$$

Tuy không tính bổ đính QCD cho trường hợp  $m_b \neq 0$ , nhưng về mặt vật lý chúng tôi có thể đoán được kết quả có dạng

$$\Gamma_{\text{QCD}}^{\text{full}} = \Gamma_0^{\text{full}} \left[ 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + O\left(\frac{m_b^2}{m_Z^2}\right) \right]. \tag{3.43}$$

Bỏ qua số hạng cuối cùng trong ngoặc vuông, ta có

$$\Gamma_{\text{QCD}}^{\text{full}} = 0.382496 \text{ GeV}. \tag{3.44}$$

Từ công thức (3.40) có thể thấy rằng phần bổ đính bậc cao QCD tỉ lệ với  $\frac{\alpha_S}{\pi} \sim 0.0377 < 1$ , nghĩa là khi ta xét các bổ đính bậc càng cao thì thành phần bổ sung vào bề rộng phân rã càng nhỏ, điều này cũng phù hợp với lý thuyết nhiễu loạn. Đồng thời, kết quả của (3.40) cũng đồng ý với kết quả ghi trong bài báo [10] của Wim Beenakker và Wolfgang Hollik.

# Chương 4

## Kết luận và hướng phát triển

### 4.1 Kết luận

Trong khóa luận này, chúng tôi đã tính toán bổ đính QCD cho quá trình phân rã của boson Z cho ra quark bottom và phản-quark bottom trong gần đúng  $m_b = 0$ . Tổng kết lại, chúng tôi rút ra những kết luận sau

- Trong luận văn này chúng tôi đã chứng minh một cách cụ thể ở mức độ một vòng rằng bổ đính gluon ảo cũng như bổ đính gluon thực là ko hữu hạn vì có chứa phân kỳ hồng ngoại. Tuy nhiên, tổng của chúng là hữu hạn. Để chứng minh điều này, chúng tôi dùng phương pháp chỉnh thứ nguyên ( $4 \rightarrow D$ ) để tách riêng phân kỳ hồng ngoại và tử ngoại.
- Giá trị thu được từ tính toán lý thuyết rất gần với giá trị thực nghiệm, điều này cho thấy được tính chính xác của Mô hình chuẩn.
- Chỉ bằng cách tách các tích phân tensor phức tạp thành các tích phân cơ sở, đồng thời sử dụng một số kết quả tích phân có sẵn, phương pháp Passrino Veltman làm cho việc tính toán trở nên dễ dàng hơn. Bên cạnh đó, khi xét đến những bổ đính bậc cao hơn như những giản đồ có từ hai vòng trở lên, ta vẫn có thể sử dụng tiếp được kết quả của các tích phân cơ sở đó.

## 4.2 Hướng phát triển

Vì thời gian làm khóa luận có hạn, nên chúng tôi chỉ giới hạn nội dung trong việc tính bổ đính bậc cao QCD trong gần đúng  $m_b = 0$ . Tuy nhiên, để có thể đạt được những kết quả chính xác hơn, chúng tôi đề xuất các hướng phát triển đề tài như sau:

- Đầu tiên là có thể tính toán lại bổ đính 1-vòng QCD như đã trình bày trong nội dung khóa luận, nhưng sẽ không sử dụng đến xấp xỉ khối lượng bottom quark  $m_b = 0$ .
- Trên thực tế, ngoài bổ đính bậc cao một vòng gây ra bởi tương tác mạnh, còn có thể mở rộng xem xét đến những bổ đính bậc cao của tương tác điện-yếu.
- Cuối cùng là để có thể tăng độ chính xác cho giá trị của bề rộng phân rã trong giới hạn bổ đính bậc cao QCD, có thể tính toán thêm đối tới những giản đồ có nhiều hơn một vòng.

# Phụ lục A

## Các công thức cần lưu ý

- Trace của ma trận  $\gamma$  [4]

$$\left\{ \begin{array}{l} Tr(\gamma^{a_1} \gamma^{a_2} \dots \gamma^{a_{(2n+1)}}) = 0, \\ Tr(\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu) = 4g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - 4g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} + 4g^{\alpha\nu} g^{\mu\beta}, \\ Tr(\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma_5) = -4i\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu}, \\ Tr(\gamma_5) = Tr(\gamma^\mu \gamma_5) = Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5) = Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_5) = 0, \\ Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}, \\ Tr(I) = 4. \end{array} \right. \quad (A.1)$$

- Các định thức rút gọn ma trận  $\gamma$  D-chiều [4]

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma^\lambda \gamma_\lambda = DI \\ \gamma_\alpha \gamma^\mu \gamma^\alpha = (2 - D)\gamma^\mu \\ \gamma_\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha = (D - 4)\gamma^\mu \gamma^\nu + 4g^{\mu\nu} \\ \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\lambda = -2\gamma^\gamma \gamma^\beta \gamma^\alpha + (4 - D)\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \end{array} \right. \quad (A.2)$$

- Các tích phân thường gặp khi xét các giản đồ bậc cao [4]

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D k}{(k^2 - s + i\epsilon)^n} &= i\pi^{D/2} (-1)^n \frac{\Gamma(n - D/2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{s^{n-D/2}}, \\ \int d^D k \frac{k^\mu}{(k^2 - s + i\epsilon)^n} &= 0, \\ \int d^D k \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - s + i\epsilon)^n} &= i\pi^{D/2} (-1)^{n+1} \frac{\Gamma(n - D/2 - 1)}{2\Gamma(n)} \frac{g^{\mu\nu}}{s^{n-D/2-1}}, \\ \int d^D k \frac{k^2}{(k^2 - s + i\epsilon)^n} &= i\pi^{D/2} (-1)^{n+1} \frac{\Gamma(n - D/2 - 1)}{2\Gamma(n)} \frac{D}{s^{n-D/2-1}}. \end{aligned} \quad (A.3)$$

- Kết quả của các tích phân Feynman vô hướng cơ sở khi dùng phương pháp Passarino-Veltman với điều kiện  $m_b = 0$  [11]

$$\begin{aligned}
B_0(p^2, 0, 0) &= \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E - \ln\left(\frac{p^2}{4\pi\mu^2}\right) + 2 + i\pi + O(\epsilon), \quad p^2 > 0 \\
C_0 &= -\frac{1}{2r_1 r_2} \left[ \left(\frac{-(k^2 + i\epsilon')}{4\pi\mu^2}\right)^{-\epsilon} \frac{\Gamma(1 + \epsilon)}{\epsilon^2} - \frac{\pi^2}{6} + O(\epsilon) \right], \quad \epsilon' \rightarrow o^+.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

- Hàm Beta, hàm Gamma [5]

$$\begin{aligned}
B(p, q) &= \int_0^1 dt t^{p-1} (1-t)^{q-1} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \\
\Gamma(z) &= \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \\
\Gamma(z+1) &= z\Gamma(z).
\end{aligned} \tag{A.5}$$

# Tài liệu tham khảo

- [1] W. Hollik. Quantum field theory and the Standard Model. arXiv:1012.3883.
- [2] J. Beringer et al. (particle data group). *Phys. Rev. D*, 86(010001), 2012.
- [3] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. An Introduction to quantum field theory. 1995.
- [4] F. Mandl and Graham Shaw. Quantum field theory. 1985.
- [5] Ansgar Denner. Techniques for calculation of electroweak radiative corrections at the one loop level and results for W physics at LEP-200. *Fortsch.Phys.*, 41:307–420, 1993, arXiv:0709.1075.
- [6] Axel Bredenstein, Ansgar Denner, Stefan Dittmaier, and Stefano Pozzorini. NLO QCD corrections to t anti-t b anti-b production at the LHC: 1. Quark-antiquark annihilation. *JHEP*, 0808(2008):108, arXiv:0807.1248.
- [7] B. Potter. Computational Techniques in Perturbative QCD: The Drell-Yan Process. 1997.
- [8] Hoàng Ngọc Long. Cơ sở vật lý hạt cơ bản, NXB Thống kê, Hà Nội. 2005.
- [9] C. Oleari. Heavy quark production. *CTEQ Summer school*, <http://users.phys.psu.edu/cteq/schools/summer06/oleari/>, 2006.
- [10] Wolfgang Hollik and Wim Beenakker. Quantum field theory and the Standard Model. *Z.Phys.*, C40:141, 1988.
- [11] Stefan Dittmaier. Separation of soft and collinear singularities from one loop N point integrals. *Nucl.Phys.*, B675:447–466, hep-ph/0308246.